

UNIEVANGÉLICA

CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

**DARA JANE DE ABREU CAIXETA
GLEICIANY FÁTIMA OLIVEIRA**

**ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COMO
FERRAMENTA NA ENGENHARIA CIVIL**

ANÁPOLIS / GO

2018

**DARA JANE DE ABREU CAIXETA
GLEICIANY FÁTIMA OLIVEIRA**

**ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COMO
FERRAMENTA NA ENGENHARIA CIVIL**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO AO
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DA UNIEVANGÉLICA**

ORIENTADOR: WANESSA MESQUITA GODOI QUARESMA

ANÁPOLIS / GO: 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

CAIXETA, DARA JANE DE ABREU/ OLIVEIRA, GLEICIANY FÁTIMA.

Estudo Do Método De Elementos Finitos Como Ferramenta Na Engenharia Civil

41P, 297 mm (ENC/UNI, Bacharel, Engenharia Civil, 2018).

TCC – UniEvangélica

Curso de Engenharia Civil.

1.MEF

3.Fundamentos

I. ENC/UNI

2. Avanço Tecnológico

4. Aplicação Numérica

II. Título (Série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CAIXETA, D. J. A. OLIVEIRA, G. F. Estudo do Método de Elementos Finitos como ferramenta na engenharia civil. TCC, Curso de Engenharia Civil, UniEvangélica, Anápolis, GO, 41p. 2018.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Dara Jane de Abreu Caixeta

Gleiciany Fátima Oliveira

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO: Estudo do Método de Elementos Finitos como ferramenta na engenharia civil.

GRAU: Bacharel em Engenharia Civil

ANO: 2018

É concedida à UniEvangélica a permissão para reproduzir cópias deste TCC e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste TCC pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



Dara Jane de Abre Caixeta

E-mail: darajane@yahoo.com.br



Gleiciany Fátima Oliveira

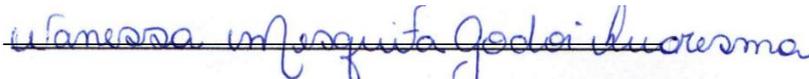
E-mail: gleiiciany.gfo@gmail.com

**DARA JANE DE ABREU CAIXETA
GLEICIANY FÁTIMA OLIVEIRA**

**ESTUDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COMO FERRAMENTA NA
ENGENHARIA CIVIL**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO AO CURSO DE
ENGENHARIA CIVIL DA UNIEVANGÉLICA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL**

APROVADO POR:



**WANESSA MESQUITA GODOI QUARESMA, Mestre em Eng. Civil (UniEvangélica)
(ORIENTADORA)**



**AGNALDO ANTONIO MOREIRA TEODORO DA SILVA, Especialista
(UniEvangélica)
(EXAMINADOR INTERNO)**



**ANNA PAULA BECHEPECHE, Doutora (UniEvangélica)
(EXAMINADOR INTERNO)**

DATA: ANÁPOLIS/GO, 06 de Junho de 2018.

A Deus, nosso maior amparo, que iluminou o nosso caminho, nos deu força e coragem ao longo desta caminhada para vencer as dificuldades. Aquele que é essencial em nossas vidas, principalmente nos momentos de angústia.

AGRADECIMENTOS

A Deus por iluminar meu caminho e dar-me força nos momentos difíceis para não desistir, por me permitir alcançar essa vitória em minha vida. Por colocar essas pessoas especiais junto a mim.

Ao meu pai, Adson (*in memoriam*), que infelizmente não pode estar presente neste momento tão feliz da minha vida, mas não poderia deixar de agradecer a ele, que me acompanhou durante quatro anos e meio de formação acadêmica. Devo muitas coisas a ele e por seus ensinamentos e valores passados. Obrigada por tudo! Saudades eternas!

A minha mãe, Valdimira, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Por total confiança e oportunidade de concretizar e encerrar mais uma caminhada da minha vida. Sei que ela não mediu esforços pra que este sonho se realizasse, sem a compreensão, ajuda e confiança dela nada disso seria possível hoje.

A minha orientadora Wanessa Mesquita pela paciência, pela disponibilidade em ajudar-me, e total dedicação em seu trabalho.

As minhas irmãs, Daiane e Daniele pelo apoio e incentivo. E a toda minha família e amigos que sempre acreditaram na minha capacidade de chegar até aqui, me apoiou e me incentivou a continuar.

A todos os professores, pelo profissionalismo e qualidade de ensino.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho e com a minha formação acadêmica.

Dara Jane de Abreu Caixeta

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que proporcionou todas minhas conquistas até aqui e todos os dias me presenteia com a oportunidade de conquistas.

Aos meus pais, Luiz e Adriana que nunca mediram esforços para que eu pudesse entrar e permanecer na faculdade até o fim, e pelo amor incondicional. Agradeço pelo bom exemplo de dignidade e seriedade.

Aos meus irmãos Luiz Miguel e Juliany pela presença e carinho e de modo especial a minha irmã por todos os seus esforços para me proporcionar tudo que precisava.

A professora Wanessa Mesquita pela orientação, paciência, disposição e total dedicação em seu trabalho.

A algumas pessoas que não estão mais em minha vida, minha vó materna Rosalina (*in memoriam*), pelo exemplo de superação e esforço.

A todos os professores do curso, que foram de suma importância na minha formação.

Gleiciany Fátima Oliveira

RESUMO

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na engenharia civil vem sendo utilizada em grande escala nos dias atuais. Impulsionada pelo avanço tecnológico, construções mais elaboradas e processos construtivos mais eficientes, os projetos têm atingido cada vez mais complexidade a respeito de sua forma construtiva, que demandam métodos de análise eficientes e de rápida solução. O MEF é um método numérico bastante utilizado devido a sua eficiência de resolver problemas complexos subdividindo o sistema sob análise em partes menores e mais simples, fornecendo resultados de tensão, deformação e deslocamento de uma estrutura. O trabalho apresenta um estudo do MEF como ferramenta na Engenharia Civil mostrando como esse método é importante dentro do avanço tecnológico. O objetivo é descrever a metodologia teórica do MEF, seu desenvolvimento histórico e a aplicação do cálculo do MEF em estruturas complexas para simplificar sua resolução. Visa-se mostrar a eficiência do método, sendo mostrado um comparativo entre uma situação resolvida por teoria da mecânica dos materiais e pelo método dos elementos finitos, e apontará também os resultados obtidos por meio da resolução da situação problema, o que trará maior entendimento do estudo da aplicação do método.

PALAVRAS-CHAVES: MEF, método numérico, avanço tecnológico, Engenharia Civil.

ABSTRACT

The application of the Finite Element Method (FEM) in civil engineering has been used on a large scale these days. Driven by technological advancement, more elaborate constructions, and more efficient building processes, projects have become more and more complex with respect to their constructive form, which demand efficient and fast solution methods of analysis. FEM is a widely used numerical method due to its efficiency of solving complex problems by subdividing the system under analysis into smaller and simpler parts, providing tensile, deformation and displacement results of a structure. The work presents a study of FEM as a tool in Civil Engineering showing how this method is important within the technological advance. The objective is to describe the theoretical methodology of the FEM, its historical development and the application of the FEM calculation in complex structures to simplify its resolution. The aim is to show the efficiency of the method, showing a comparative between a situation solved by the theory of the mechanics of the materials and by the method of the finite elements, and will also point out the results obtained by means of the resolution of the problem situation, which will bring more understanding of the study of the application of the method.

KEYWORDS: FEM, numerical method, technological advance, Civil Engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Viga em balanço.....	19
Figura 2 – Viga bi-apoiada.....	20
Figura 3 – Viga contínua.....	20
Figura 4 – Exemplos de pórticos.....	21
Figura 5 – Atuação dos esforços na treliça plana.....	22
Figura 6 – Exemplo de treliças espaciais.....	23
Figura 7 – Grelhas de vigas com disposição ortogonal e diagonal.....	23
Figura 8 – Exemplo de estrutura sólida.....	25
Figura 9 – (a) Estrutura real com carregamentos.....	26
Figura 9 – (b) Idealização do problema físico para o modelo matemático.....	26
Figura 9 – (c) A análise pelo MEF resolve esse modelo matemático.....	26
Figura 10 – Elemento finito em uma dimensão.....	26
Figura 11 – Elemento finito em duas dimensões.....	26
Figura 12 – Elemento finito em três dimensões.....	27
Figura 13 – Malha em duas dimensões.....	27
Figura 14 – Malha em três dimensões.....	27
Figura 15 – Apoios com seus respectivos símbolos, graus de liberdade e reações.....	28
Figura 16 – Idealização do problema físico.....	28
Figura 17 – Estrutura sem carregamentos, apoios e desacoplados.....	29
Figura 18 – Elementos no mesmo sistema de coordenadas.....	29
Figura 19 – Deslocamentos da estrutura discretizada.....	30
Figura 20 – Barra de aplicação do estudo.....	32
Figura 21 – Modelo de um Elemento Finito.....	35

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Vantagens e desvantagens do MEF.....	30
---	----

LISTA DE TABELA

Tabela 1 – Comparativo dos valores.....	37
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas,
EDP	Equação diferencial parcial,
MEF	Método de elementos finitos,
NBR	Norma Brasileira,
σ	Tensão Normal,
P	Carga aplicada,
A	Área da Seção Transversal,
L	Comprimento,
ε	Deformação,
du	Variação de Comprimento,
dx	Comprimento Inicial,
E	Módulo de Elasticidade
u	Deslocamento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	13
1.2 OBJETIVOS	14
1.2.1 Objetivo geral.....	14
1.2.2 Objetivos específicos.....	14
1.3 JUSTIFICATIVA.....	14
1.4 METODOLOGIA	15
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	15
2 ESTADO DA ARTE – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	16
2.1 CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	16
2.2 TIPO DE ANÁLISE ESTRUTURAL	17
2.2.1 Vigas.....	19
2.2.2 Pórticos.....	20
2.2.3 Treliças.....	22
2.2.3.1 Treliças Planas.....	20
2.2.3.2 Treliças Espaciais.....	21
2.2.4 Grelha.....	23
2.3 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	24
2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	30
2.5 VANTAGENS	Erro! Indicador não definido.
2.6 OBSERVAÇÕES.....	Erro! Indicador não definido.
3 APLICAÇÃO NUMÉRICA – ESTUDO DE CASO.....	32
3.1 SOLUÇÃO POR TEORIA DA MECÂNICA DOS MATERIAIS	32
3.2 SOLUÇÃO PELO MEF.....	35
3.3 COMPARATIVO ENTRE SOLUÇÕES.....	35
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo de introdução serão apresentados os estudos que deram início a esta monografia. Abordará a contextualização do tema, bem como os objetivos gerais e específicos, justificativa, metodologia empregada e a estruturação do trabalho.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O projeto estrutural tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo questões de segurança, condições de utilização, condições econômicas, estética, temas ambientais, categorias construtivas e restrições legais.

Um projeto estrutural é composto pela concepção, análise, dimensionamento e verificações de as condições propostas. A análise estrutural deve ser levar em consideração a geometria estrutural, as condições de contorno e a propriedades dos materiais.

Para se ter uma boa estrutura devemos satisfazer relações: relações construtivas - relação entre tensões e deformações -, relações cinemáticas – relações entre deslocamentos e deformações – e relações de equilíbrio que são relações entre forças e tensões. Existem vários métodos de análise estrutural, entre eles o Método dos Elementos Finitos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em diferentes métodos numéricos que aproximam a solução por equações diferenciais parciais, para determinadas condições de contorno. A solução para os problemas é dada pela subdivisão da geometria do problema em elementos menores, chamados elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata pode ser obtida por interpolação de uma solução aproximada. Sendo assim é necessário buscar-se soluções locais, que nas suas propriedades garantem uma convergência para os problemas globais.

Rao (1999) diz que a ideia básica do Método dos Elementos Finitos é encontrar a solução de um problema complicado por meio da subdivisão do problema inicial em vários outros problemas de simples resolução. A solução obtida é uma aproximação, porém na falta de um recurso mais aprofundado o método de elementos finitos é eficaz. Já Azevedo (2003) diz que o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objetivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações externas.

Para a solução geral de um problema estático na área de engenharia das estruturas, utilizando do Método Numérico de Elementos Finitos através dos seguintes passos: Discretização da estrutura, seleção de um modelo adequado de deslocamento ou interpolação, obtenção das matrizes de rigidez e vetores de cargas, junção dos elementos para obtenção das equações de equilíbrio, solução dos deslocamentos desconhecidos e por último cálculo das tensões e deformações nos elementos.

No MEF dividimos a estrutura em pequenas partes, e uma região complexa do contínuo é dividida em formas geométricas simples. Assim o comportamento dentro de cada elemento pode ser descrito por funções simples.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Objetiva-se estudar a ferramenta numérica do método dos elementos finitos ressaltando a importância dentro do avanço tecnológico da engenharia civil.

1.2.2 Objetivos específicos

- Abordar de maneira didática o uso do Método dos Elementos Finitos, buscando contribuir para a formação dos acadêmicos, do curso de Engenharia Civil, na área de construção civil, possibilitando ao leitor uma visão mais ampla do tema dentro da engenharia civil e sociedade;
- Mostrar a aplicação numérica do Método dos Elementos Finitos visando a tecnologia no cálculo de estruturas por meio de um estudo numérico.

1.3 JUSTIFICATIVA

A opção pelo estudo, para desenvolvimento e aplicação da ferramenta numérica do método dos elementos finitos foi dada haja visto que a realidade da área da engenharia civil, principalmente com o avanço tecnológico que acompanha a necessidade social da construção civil, e de problemas de campo que demandam métodos de análise eficientes e rápidos para solução.

Motivado pelo avanço tecnológico, construções mais elaboradas e processos construtivos mais eficientes, os projetos têm atingido cada vez mais complexidade a respeito da sua forma constitutiva. Exemplo disto é a cidade de Dubai, no Emirados Árabes. Desta forma, conhecer modelos de cálculos adequados para analisar as estruturas, sob estados multiaxiais de tensão e deformação e a sua verificação em um programa computacional, poderiam contribuir com as informações necessárias para o estabelecimento de diretrizes e orientações aplicadas ao desenvolvimento de projetos que preveem o uso deste material em elementos estruturais.

1.4 METODOLOGIA

Visando atingir os objetivos propostos neste trabalho foi realizado o estudo do Método dos Elementos Finitos como ferramenta na engenharia civil mostrando como esse método é importante dentro do avanço tecnológico. Desta forma, foi estudado a aplicação do cálculo do MEF em estruturas complexas para simplificar sua resolução.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado em cinco capítulos. No Capítulo 1 é apresentada uma breve introdução, onde contextualiza-se o tema tratado, expõe os objetivos gerais e seus desdobramentos específicos, justificativa, bem como uma apresentação da metodologia a ser empregada e a estruturação do texto. O Capítulo 2 se constitui do estado da arte da monografia, apresentando os aspectos gerais, breve histórico, principais métodos e exemplos. O Capítulo 3 apresenta a aplicação numérica em forma de estudo de caso. No Capítulo 4, por fim, apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 ESTADO DA ARTE – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica da monografia, tal estudo é de suma importância para o cumprimento dos objetivos propostos pelo trabalho.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

É difícil se determinar a origem do MEF, pois o desenvolvimento de seus conceitos básicos abrange mais de 150 anos. Antes da década de 60 já existiam métodos de análise estruturais semelhantes ao MEF. Porém, somente na década de 60 que foi utilizada a designação “elemento finito” estabelecido por Ray Clough (ALMEIDA, 2014).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) teve uma evolução que demorou mais de um século, surgiu pela junção de dificuldades nas soluções analíticas para todo tipo de estrutura e pelo avanço tecnológico que permitia a resolução e elaboração de sistemas de equações complexas. Sendo um método numérico o MEF, passou a solucionar problemas de campo.

Método desenvolvido a partir de uma base física para análise de problemas em engenharia estrutural. A origem do nome Elementos Finitos surgiu por se tratar de pequenas partes da estrutura que é particionado em formas geométricas simples (com formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.). Um elemento tem um número finito de graus de liberdade. Assim um corpo contínuo é dividido em um número finito de elementos conectados por nós artificialmente, permitindo assim o estudo dos deslocamentos e tensões (AZEVEDO, 2003).

O MEF requer experiência para construir um bom modelo matemático. Como se trata de uma solução que se dá por uma aproximação se torna fonte de erros inerentes. Portanto cada problema específico tem uma solução específica. Além disso, o método requer de um programa computacional eficiente e preciso, pois quanto mais complexo for o problema, maior será a necessidade de uma capacidade computacional.

Cook, et al. (2001, p.10) destaca que em 1851, para derivar a equação diferencial da superfície da área mínima delimitada por uma curva fechada dada no espaço, Schell bach discretizou uma superfície em triângulos diretos e escreveu uma expressão de diferença finita para a área total discretizada. Ele não propõe nenhuma outra aplicação ou generalização da ideia.

O MEF é agora, portanto considerando como uma maneira de evitar equações diferenciais, substituindo-as por um conjunto aproximado de equações algébricas.

O MEF foi desenvolvido em 1909 por Walter Ritz (1878-1909) para determinar a solução aproximada de problemas em mecânica dos sólidos deformáveis, onde a funcional energia era aproximada por funções conhecidas com coeficientes a serem determinados.

Mas o método como o conhecemos hoje parece ter se originado com Courant (1888 - 1972) em seu artigo de 1943, que é a versão escrita de uma conferência de 1941 para a American Mathematical Society. Courant determinou a rigidez torcional de um eixo oco, dividindo a seção transversal em triângulos e interpolando uma função linearmente sobre cada triângulo a partir de valores de cada nó.

Courant dizia que o método sugere uma ampla generalização que ofereça grande flexibilidade e que tem um valor prático considerável. As aplicações práticas não apareceram até que os engenheiros aeronáuticos desenvolvessem o método, aparentemente sem conhecer o trabalho de Courant. Os engenheiros da indústria aeronáutica fizeram progressos notáveis no início da década de 1950, embora alguns dos trabalhos não tenham sido publicados até muito mais tarde devido as políticas da empresa. No início desse período, as equações dos métodos de análise convencionais foram desenvolvidas nos pequenos computadores então disponíveis.

Já o nome “Elementos Finitos” foi inventado por Clough (1920-2016) em 1960 sendo seu artigo de 1956 é uma das mais antigas referências ao MEF. Os programas de computadores de propósito geral para o MEF surgiram no final da década de 1960 e no início de 1970, desde então os gráficos computacionais foram crescentemente anexados ao software, tornando o MEF atraente o suficiente para ser usada no projeto atual (COOK, 2001).

2.2 TIPO DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Martha (2010) diz que análise estrutural é a fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, tais como pelos campos de tensões, deformações e deslocamentos na estrutura. De uma maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), e das correspondentes tensões, bem como a determinação dos deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura que está sendo projetada.

Quando se tem a necessidade de solucionar problemas de análise de estruturas, os Métodos dos Elementos Finitos possibilitam a obtenção de respostas para inúmeros desses problemas. Os problemas analisados podem variar desde treliças planas, espaciais, pórticos, chapas, placas, cascas, até sólido tridimensional. Com isso o modo como o MEF é formulado se diferem quanto a geometria, modelo do material constituinte e forças aplicadas.

Para a análise de uma estrutura alguns aspectos que a antecede devem ser levados em consideração, que são os tipos de análises e os tipos de elementos estruturais.

Conforme Azevedo (2003), com relação aos tipos de análises tem-se:

- **Análise dinâmica ou estática:** No domínio da engenharia civil as ações em geral são dinâmicas, resultantes da existência de fenômenos que dependem do tempo, direção e ou posição, onde não podem ser representadas por ações estáticas, isto é, devendo ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos seus componentes fica sujeito. Contudo em muitas situações é preciso considerar que as ações são aplicadas de uma maneira muito lenta, onde se tornam desprezíveis as forças de inércia, onde este caso a análise indica-se estática.

- **Análise não linear e linear:** quando os deslocamentos provocados pelas ações externas são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura, isto é, não existe influencia na modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões, sendo todo o estudo feito com base na geometria inicial indeformada, a análise é linear. Caso contrário é uma análise não linear.

Com relação aos tipos de estruturas tem se que estas são classificadas quanto à sua geometria como reticuladas, laminares ou sólidas.

Segundo Azevedo (2003), com relação aos tipos de estruturas tem-se:

As estruturas reticuladas são as constituídas por barras prismáticas, cujas dimensões transversais são muito menores do que o comprimento do respectivo eixo. Existem quatro tipos principais de estruturas reticuladas, que são: treliças, vigas, pórticos e grelhas. Sendo que os três primeiros podem ser planos, quando todas as barras e carregamentos estão contidos em um mesmo plano ou espaciais quando a disposição das barras e/ou carregamentos é tridimensional. Já as grelhas são, por construção, estruturas em que os carregamentos são sempre ortogonais ao plano da estrutura.

As estruturas laminares são aquelas formadas por elementos, onde duas dimensões são da mesma ordem de grandeza e a terceira acentuadamente de menor dimensão, ou seja, a espessura é muito inferior às restantes dimensões. A estrutura laminar pode ser classificada

como parede, laje ou casca plana quando a sua superfície média é plana ou caso a superfície média não é plana, tem-se uma casca tridimensional.

Por último, as estruturas sólidas, um caso particular a análise de uma estrutura, que não apresentam características para se encaixar no grupo das laminares e reticuladas, cuja geometria a ações se repetem indefinidamente ao longo de um eixo retilíneo.

2.2.1 Vigas

Segundo item 14.4.1.1 da NBR 6118 (ANBT, 2003), as vigas são “elementos lineares em que a flexão é preponderante”, portanto os esforços predominantes são momento fletor e força cortante.

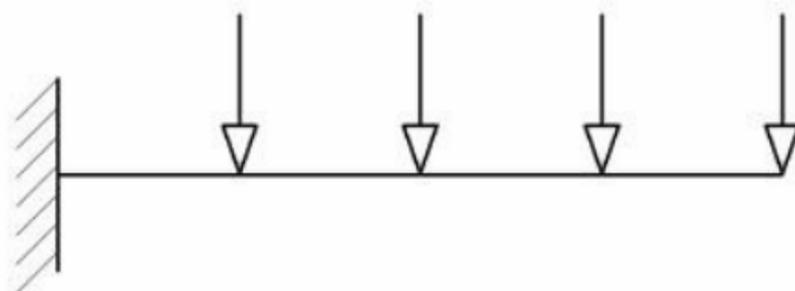
As vigas podem ser dispostas horizontalmente ou inclinadas, com um ou mais apoios (móvel ou fixo), engastes e etc, de tal forma a garantir que tais barras sejam no mínimo isostáticas. Podem ser confeccionadas de madeira, aço, ferro fundido, concreto (armado ou protendido) e alumínio, com aplicações nos mais diversos tipos de construções (SOUZA, RODRIGUES, 2008).

As vigas são normalmente sujeitas a cargas dispostas verticalmente, o que resultará em esforços de cisalhamento e flexão. Quando cargas não verticais são aplicadas a estrutura, surgirão forças axiais, o que tornará mais complexa a análise estrutural (PINTO, 2000).

As edificações basicamente apresentam três tipos de vigas, que diferem na forma como são ligados aos seus apoios, podendo ser:

- Viga em balanço: viga de edificação com um só apoio (engaste). Toda a carga recebida é transmitida a um único ponto de fixação.

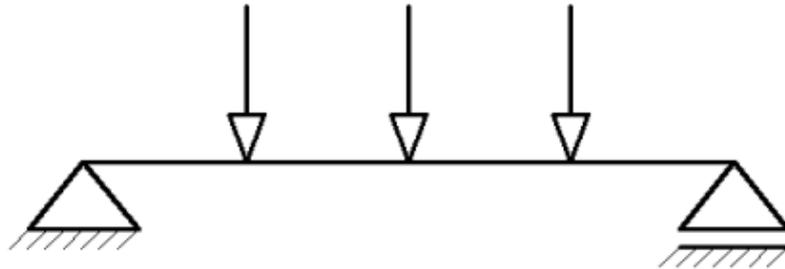
Figura 1 – Viga em balanço



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

- Viga biapoiada: possui apenas dois apoios. É projetada para momento fletor máximo no centro da viga.

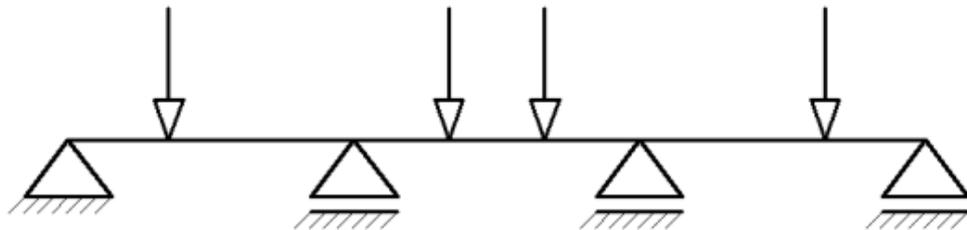
Figura 2 – Viga Biapoiada



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

- Viga contínua: viga hiperestática, sobre mais de dois apoios.

Figura 3 – Viga contínua



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

2.2.2 Pórticos

Os pórticos são elementos formados pela associação de elementos lineares, pilares e vigas, funcionando como uma só peça, conectados em suas extremidades de forma a não permitir rotações relativas.

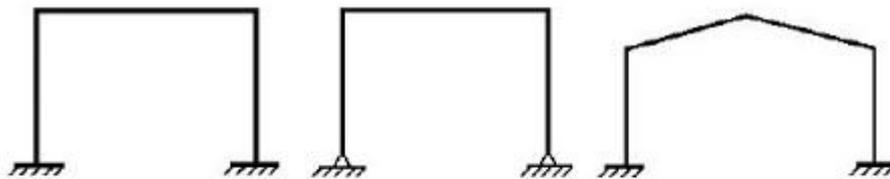
Os pórticos planos são estruturas formadas por barras cujos eixos pertencem a um único plano, com carregamento atuante no mesmo plano do sistema estrutural, já quando a disposição das barras e/ ou carregamentos é tridimensional os pórticos são espaciais.

Os pórticos são capazes de garantir estabilidade e a resistência a esforços normais, cortantes e, principalmente, os esforços de flexão, devido à união entre os elementos. São

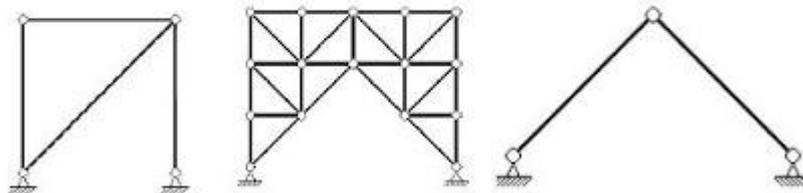
caracterizados por nós rígidos ou rotulados, podendo existir articulações nos elementos estruturais.

Pórtico composto é a associação de pórticos simples, ou seja, pórticos sem estabilidade própria apoiados sobre pórticos com estabilidade própria.

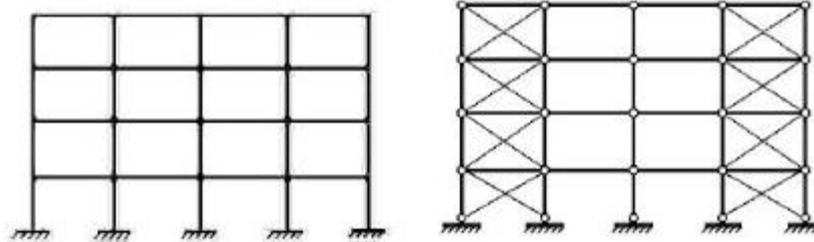
Figura 4- Exemplos de pórticos



Pórticos deslocáveis (simples)

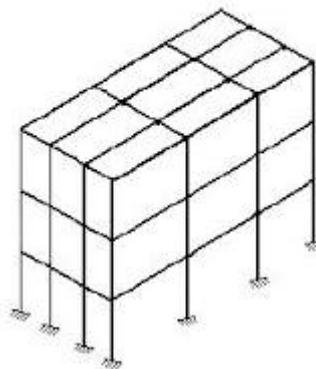


Pórticos indeslocáveis (simples)



Pórtico indeslocável (múltiplo)

Pórtico deslocável (múltiplo)



Pórtico espacial (reticulado tridimensional)

Fonte: PrÉIC, 2012.

2.2.3 Treliças

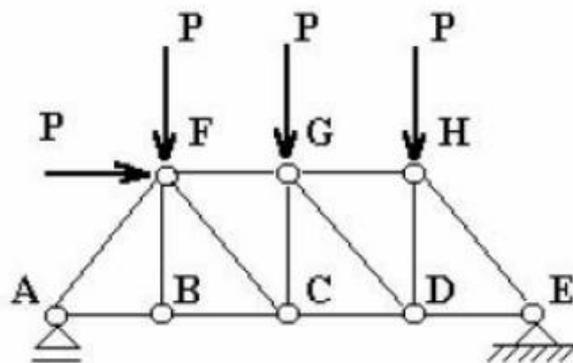
Treliças são componentes estruturais lineares constituídas por barras, dispostas de modo que formam painéis triangulares pretendidas basicamente por compressão ou tração. Existem duas classificações de treliças: planas ou espaciais que são classificadas de acordo com a formas que seus elementos são distribuídos em um plano ou em planos distintos.

2.2.3.1 Treliças Planas

Denomina-se treliça plana o conjunto de elementos de construção disposta de forma geométrica triangular que pertencem a um único plano que são integrados entre si. Podem ser constituídas por barras redondas, chatas ou cantoneiras.

Treliça é uma estrutura muito usada em pontes, viadutos, coberturas, torres, guindastes, etc. É considerada ideal quando possui todas as extremidades de suas barras rotuladas e as cargas são aplicadas nessas rótulas.

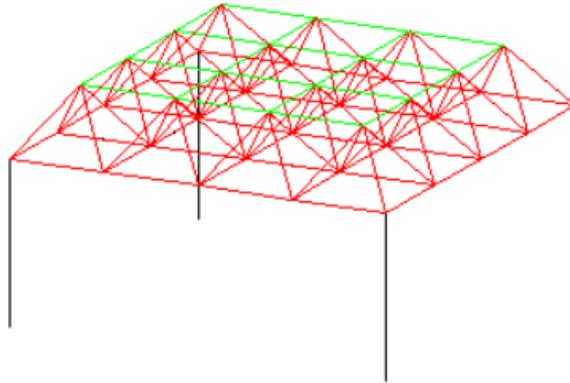
Figura 5 – Atuação dos esforços na treliça



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

2.2.3.2 Treliças Espaciais

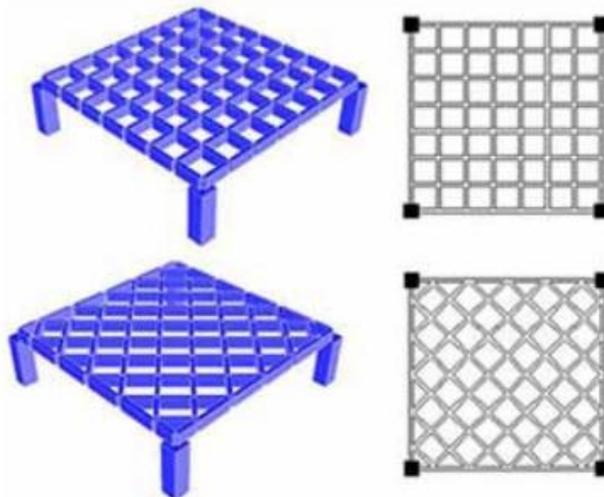
Treliça espacial é uma estrutura tridimensional metálica de aço ou alumínio (perfis tubulares circulares, retangulares ou quadrados), que é usada basicamente na forma triangular, devido a essa característica geométrica e composição de seus elementos, as treliças espaciais são mais resistentes a ruptura. Tem a função de distribuir os esforços através de seus elementos (barras e nós) de forma bastante eficaz.

Figura 6 – Exemplo de treliças espaciais

Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

2.2.4 Grelha

Grelha é uma estrutura reticulada plana submetida a carregamentos perpendiculares ao seu plano. Essas estruturas são formadas por elementos lineares, geralmente vigas, interceptados de forma a não permitir rotações relativas, ou seja, trabalham em conjunto para resistir às ações atuantes. As grelhas são capazes de resistir aos esforços normais, cortantes, esforços de flexão e torção.

Figura 7 – Grelhas de vigas com disposição ortogonal e diagonal

Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

2.3 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

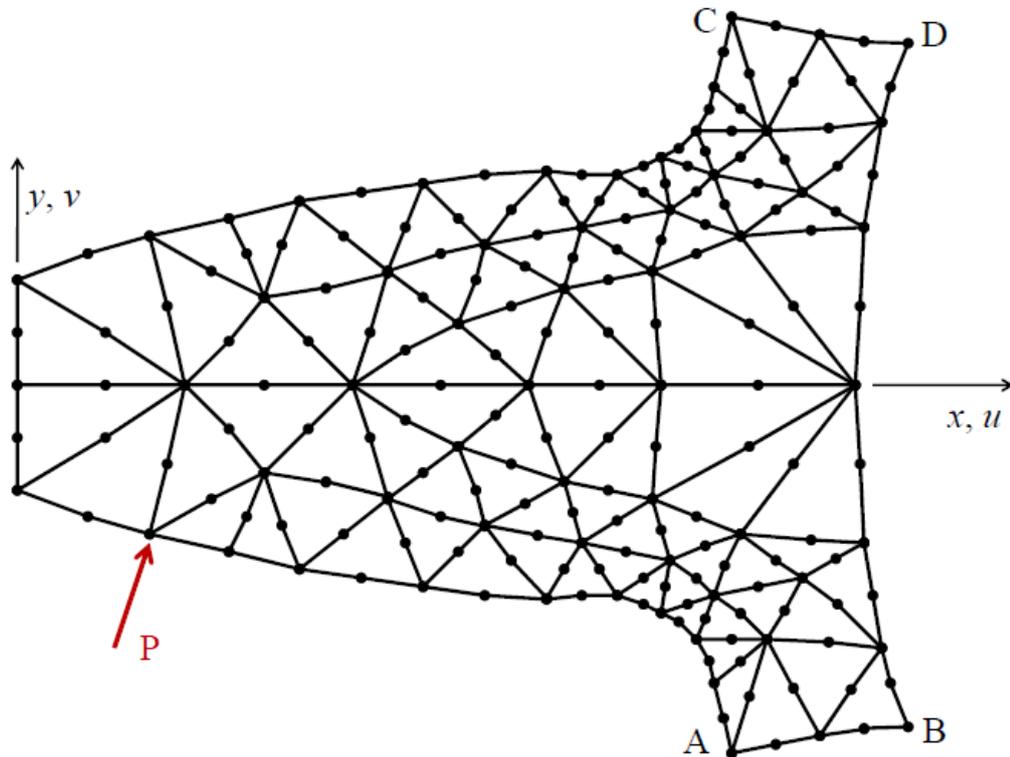
Cook, (2002) diz que o Método dos Elementos Finitos consiste em diferentes métodos numéricos que aproximam a solução de problemas através da subdivisão da geometria do problema em elementos menores, chamados elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata pode ser obtida por interpolação de uma solução aproximada.

Pode-se dizer que o MEF é uma aproximação discreta (número finito de incógnitas) para um problema contínuo (número infinito de incógnitas). Nesse tipo de método, a região do espaço que delimita o problema considerado é dividida em um número finito de elementos geométricos simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.), sendo que em cada um deles o campo contínuo, no qual as variáveis da Equação Diferencial Parcial (EDP) são definidas, é modelado por uma aproximação polinomial local controlada por uma pequena quantidade de coeficientes. A conexão desses elementos através dos valores desses coeficientes em posições nodais compartilhadas, resulta em um conjunto de equações algébricas que pode ser resolvido numericamente por meio de métodos de otimização e de algoritmos matriciais.

De forma genérica, a modelagem através do MEF possui etapas operacionais bem definidas:

- discretizar (subdividir, conforme Figura 8) a região de solução em um número finito de sub-regiões ou elementos;
- derivar as equações para os elementos típicos;
- montar todos os elementos na região de solução;
- resolver o sistema de equações obtido.

Figura 8 – Exemplo de estrutura sólida

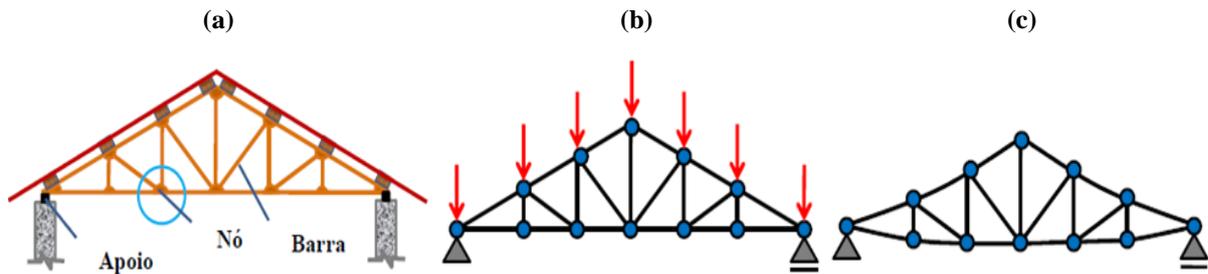


Fonte: Cook R.D., Malkus D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. “Concepts and applications of finite element analysis”. 4 ed. New Jersey: John Wiley & Sons. Inc., 2001. 719p.

Antes de realizar discretização do Elemento Finito a solução é numérica. Esta etapa envolve a decisão de quais recursos são importantes para o objetivo em questão, de modo que detalhes desnecessários podem ser omitidos e decidir quais teorias ou matemática descreve o comportamento. Assim podemos ignorar cargas geométricas, pois alguns materiais podem ser idealizados como isotópicos. Dependendo do carregamento, das dimensões e das condições de limites desta idealização, podemos decidir que comportamento é descrito por equações de elasticidade. Como o MEF subsequente é aproximado e pertence apenas ao modelo matemático, o MEF é dois ou três passos removidos da realidade.

Almeida (2014) descreve a ideia do MEF através do seguinte esquema: A Figura 9a mostra a estrutural real sujeita a um carregamento correspondente a um carregamento de cobertura, a figura 9b apresenta a idealização do problema físico para o modelo matemático, onde conduz a um conjunto de equações diferenciais que governam o modelo matemático. A análise pelo MEF resolve esse modelo matemático conforme figura 9c.

Figura 9 – Ideia do Método



Fonte: ALMEIDA, 2014.

Resolver um problema prático pelo MEF envolve aprender sobre o problema, preparar um modelo matemático, discretizá-lo, fazer o computador fazer os cálculos e verificar os resultados. Na maioria das vezes, é necessário mais de um ciclo através dessas etapas. O tempo gasto no computador é uma pequena fração de tempo gasto pelo analista, mas o analista deve ter uma compreensão do que o computador está fazendo. O analista deve compreender a natureza do problema, sem esse passo, um modelo adequado não pode ser concebido, nem o software MEF pode ser informado sobre o que fazer.

Pode-se definir os elementos a se utilizar na formulação dos métodos elementos finitos conforme figuras abaixo:

Figura 10 – Elemento em uma dimensão



Fonte: ALMEIDA, 2014.

Figura 11 – Elemento em duas dimensões

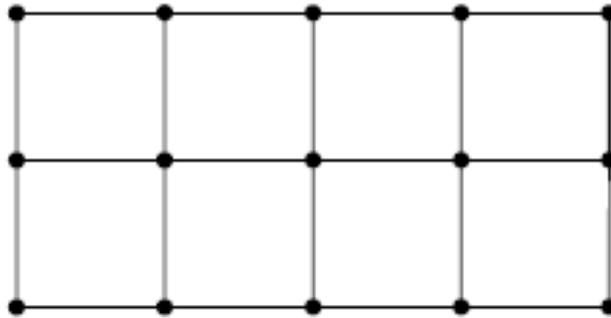


Fonte: ALMEIDA, 2014.

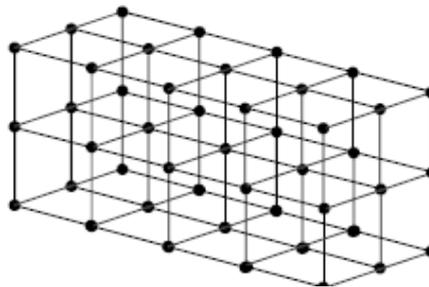
Figura 12 – Em três dimensões

Fonte: ALMEIDA, 2014.

As junções dos elementos formam “pedaços” da peça que são denominadas malhas conforme figuras abaixo:

Figura 13 – Em duas dimensões

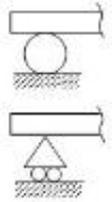
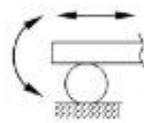
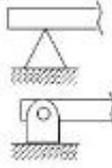
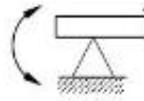
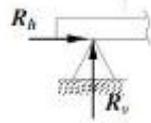
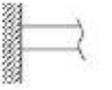
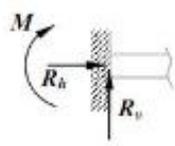
Fonte: ALMEIDA, 2014.

Figura 14 – Em três dimensões

Fonte: ALMEIDA, 2014.

Os Graus de liberdade são quantidades independentes que governam a variação espacial de um campo, (Deslocamentos da estrutura);

Figura 15 - Apoios com seus respectivos símbolos, graus de liberdade e reações

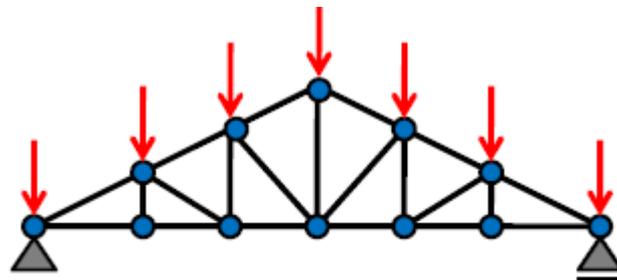
Apoio	Simbologia	Graus de liberdade	REAÇÕES
MÓVEL			
FIXO			
ENGASTE			

Fonte: BENTO, 2003.

A solução pelo método dos elementos finitos é baseada pela escolha do elemento finito; Densidade de malha; Parâmetros de solução; Representação de Carregamento; Condições de contorno; Etc.

Solução do modelo discreto:

Figura 16 – Idealização do problema físico

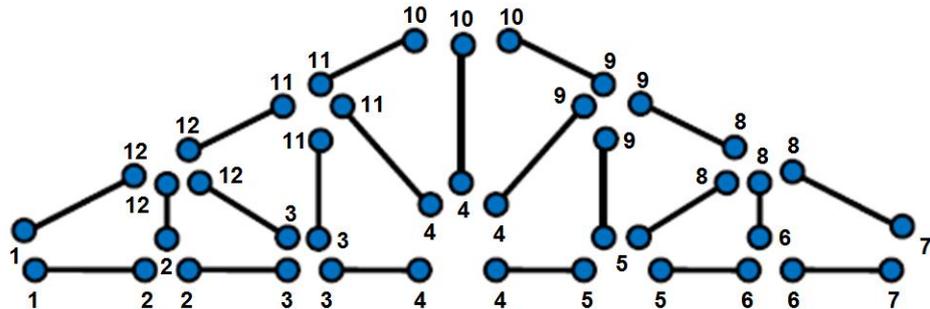


Fonte: ALMEIDA, 2014.

- Remover os carregamentos e apoios;

- Desacoplar os elementos;

Figura 17 – Estrutura sem carregamentos, apoios e desacoplados

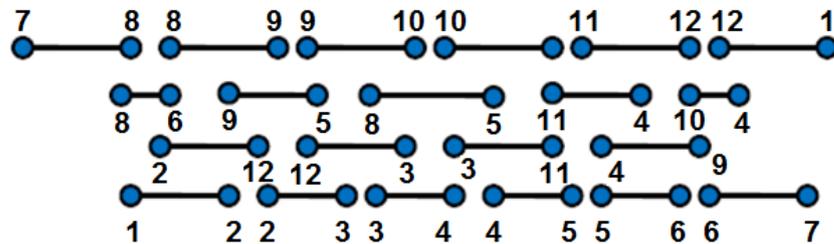


Fonte: ALMEIDA, 2014.

- Colocar os elementos no mesmo sistema de coordenadas;

Figura 18 – Elementos no mesmo sistema de coordenadas

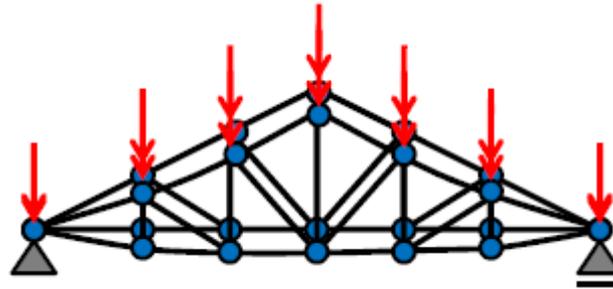
Fonte: Autoria Própria, 2018.



Fonte: ALMEIDA, 2014.

- Voltar para o sistema de coordenadas da estrutura (global);
- Juntar;
- Colocar os apoios;
- Aplicar os carregamentos;
- Obter os deslocamentos globais.

Figura 19 – Deslocamentos da estrutura



Fonte: ALMEIDA, 2014.

2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A utilização do MEF vem tendo grande aplicação desde os anos de 50, que envolvem análises dinâmicas ou estáticas, linear ou não linear, sendo mais aplicado nas áreas da Engenharia Civil e Mecânica, para análises de estruturas através das cargas, tensões, carregamento, entre outros. São vários os campos de aplicação desse método, em que podemos citar: automobilística, naval, aeronáutica e aeroespacial; Metalurgia; Mineração; Exploração de petróleo; Setor energético; Telecomunicações; Forças Armadas; Meio ambiente; Recursos Hídricos e até mesmo na área da Saúde.

Na área da engenharia Civil resolve problemas de engenharia estrutural, como edifícios, pontes, barragens, etc., em que busca determinar as tensões, deformações e deslocamentos em um corpo sujeito a forças e deslocamentos impostos.

Em muitos casos práticos, o Método dos Elementos Finitos é a única ferramenta capaz de fornecer uma solução aceitável, ainda que aproximada, por isso um método tão utilizado.

Quadro 01- Vantagens e desvantagens do MEF

VANTAGENS	DESVANTAGENS
<ul style="list-style-type: none"> • Pode ser aplicado a geometrias muito complexas; • Suporta análises complexas; • Comportamento não linear; • Comportamento dinâmico; • Análise transiente; 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtém-se uma solução numérica específica para um problema específico: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Não se produz uma solução analítica geral que permita examinar a resposta do

<ul style="list-style-type: none"> • Transferência de calor; • Fluidos; • Permite adotar condições de apoio complexas; • Permite aplicação de carregamentos complexos: • Aplicados nos nós ou nos elementos; • Dependente do tempo; • Situações de carregamento-descarregamento • Permite a análise de corpos com materiais compostos: <ul style="list-style-type: none"> ➤ A cada elemento pode ser atribuído um conjunto diferente de propriedades de material; ➤ Permite considerar comportamento ortotrópico ou anisotrópico; • Permite leis de comportamento de material complexas: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Plasticidade; ➤ Fluência; ➤ Fissuração; ➤ Comportamento dependente da temperatura; • Permite modelar comportamentos geométricos complexos: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Grandes deslocamentos; ➤ Grandes deformações; <p>Condições especiais de contato.</p>	<p>sistema em relação a mudanças em parâmetros;</p> <ul style="list-style-type: none"> • O MEF é aplicado para uma aproximação do modelo matemático: <ul style="list-style-type: none"> ➤ A solução obtida é uma aproximação; ➤ Fonte de erros intrínsecos; ➤ É necessária experiência para construir um bom modelo matemático; • É necessário um programa computacional eficiente e confiável: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Quanto mais elaborado for o problema, maior capacidade computacional será requerida; • Problemas numéricos: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Computadores representam números com um número finito de dígitos; ➤ Acúmulo de erros de arredondamento / truncamento; • Suscetível a erros de modelagem introduzidos pelo usuário: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Escolha ruim de elementos; ➤ Elementos distorcidos; ➤ Geometria representada de forma inadequada; • Alguns efeitos não são incluídos automaticamente: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Flambagem; ➤ Grandes deslocamentos e grandes rotações;
---	--

	<p>➤ Comportamento não linear do material, etc.</p>
--	---

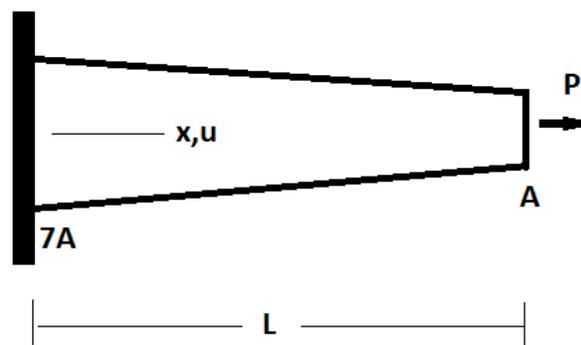
Fonte: Autoria própria.

APLICAÇÃO NUMÉRICA – ESTUDO DE CASO

Com o objetivo de elucidar o estudo abordado durante este trabalho, foi criado um comparativo entre uma situação resolvida por teoria da mecânica dos materiais e pelo método dos elementos finitos, como segue descrito abaixo.

Considere uma barra com seção transversal variável em função de seu eixo longitudinal x , com a área A variando ao longo da seção, e também uma força P , como mostra a figura.

Figura 20 – Barra de aplicação do estudo



Fonte: Autoria Própria, 2018.

2.5 SOLUÇÃO POR TEORIA DA MECÂNICA DOS MATERIAIS

Por definição a tensão normal em qualquer seção da barra é determinada pela intensidade da força ou força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular a área. Como a área varia em função do eixo longitudinal (x), como mostra a Figura 20, de acordo com a equação (1) a tensão em qualquer seção da barra, será também em função de x , dada por:

$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)} \quad (1)$$

que é determinada através da relação entre a intensidade da carga aplicada P e a área da seção transversal (A), em que A(x) por definição, é calculada por integral, como mostra a equação (2):

$$A(x) = \left(7 - \frac{6x}{L}\right)A \quad (2)$$

Usando as equações (1) e (2), temos a seguinte relação, obtendo a equação (3):

$$\sigma(x) = \frac{P}{\left(7 - \frac{6x}{L}\right)A} \rightarrow \sigma(x) = \frac{PL}{(7L - 6x)A} \quad (3)$$

Nessa equação:

$\sigma(x)$ → tensão normal em função de x;

P → carga aplicada;

A → Área da seção transversal;

L → Comprimento da barra em m

Se P estiver tracionando a barra $\sigma > 0$;

Se P estiver comprimindo a barra $\sigma < 0$.

O alongamento/compressão produzido à medida que o material responde a tensão aplicada é chamada de deformação (ε), medida pela razão entre a variação do comprimento de elemento infinitesimal (du) e o comprimento inicial (dx) da barra ao longo da aplicação da tensão, dada pela equação (4):

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (4)$$

Considerando a lei de Hooke, isto é $\sigma(x) = E\varepsilon$, onde E é a constante do módulo de elasticidade, podemos usar equações anteriores para obter a relação que nos permite determinar o deslocamento da barra, sendo mostrada pela equação (5):

$$\sigma(x) = E\varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{du(x)}{dx}$$

$$du(x) = \frac{Pdx}{EA(x)} \quad (5)$$

Esse deslocamento pode ser positivo ou negativo dependendo do sinal da força na equação (5):

Se P estiver tracionando a barra $du(x) > 0$;

Se P estiver comprimindo a barra $du(x) < 0$.

A deformação total da barra é o somatório dos vários trechos infinitesimais, isto é, na forma de integral (equação (6)):

$$u(x) = \int_0^x \frac{P}{EA(x)} dx \quad (6)$$

Substituindo a equação (2) na equação (6), obtemos (7):

$$u(x) = \int_0^x \frac{P}{E \left(7 - \frac{6x}{L}\right) A} dx \quad (7)$$

Logo por definição de integral o deslocamento é dado pela equação (8):

$$u(x) = \frac{PL}{6EA} \left(\ln(7) - \ln\left(7 - \frac{6x}{L}\right) \right) \quad (8)$$

Aplicando na equação (8), x variando de 0 a L, temos:

$$u(0) = 0$$

$$u\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{PL}{6EA} \left(\ln(7) - \ln\left(7 - \frac{6 \cdot \frac{L}{3}}{L}\right) \right) \rightarrow u\left(\frac{L}{3}\right) = 0,056 \frac{PL}{EA} \quad (9)$$

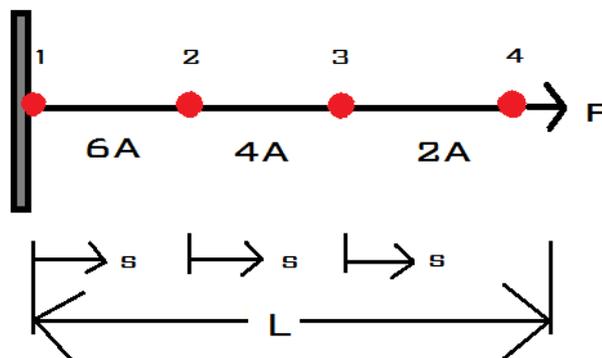
$$u\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL}{6EA} \left(\ln(7) - \ln\left(7 - \frac{6 \cdot \frac{2L}{3}}{L}\right) \right) \rightarrow u\left(\frac{2L}{3}\right) = 0,1412 \frac{PL}{EA} \quad (10)$$

$$u(L) = \frac{PL}{6EA} (\ln(7) - \ln(7 - \frac{6L}{L})) \rightarrow u(L) = 0,3243 \frac{PL}{EA} \quad (11)$$

2.6 SOLUÇÃO PELO MEF

Partindo da base do princípio do método dos elementos finitos de que a estrutura deve ser dividida em elementos menores, esses, podem ser tanto elementos de barra, plano ou sólidos, com um, dois, ou três nós. Considerando a mesma barra do exemplo por mecânica dos materiais, Figura 20, sob regime elástico linear, dividida inicialmente em 3 elementos com um comprimento total L, encontramos a malha de elementos finitos da barra conforme Figura 21.

Figura 21 - Modelo de um Elemento Finito



Fonte: Aatoria Própria, 2018.

O processo de montagem de malha em elementos finitos, além de um processo de tomada de decisão do analista, para melhores resultados é recomendado o melhor detalhamento das input¹, essas nesse caso podem ser ditas como: carregamento, geometria, material e outras variáveis.

Considera-se como dados de saída, em uma análise simples, o deslocamento da estrutura, considerando a carga aplicada pode-se dizer que é um alongamento axial. Sendo

¹ Variáveis de entrada do método numérico.

assim, o deslocamento axial u . Com base na relação de tensão-deformação dada pela equação 12 é dado

$$\sigma = E\varepsilon \quad (12)$$

E pelo deslocamento nodal de cada elemento, pelo alongamento axial conforme a equação 13

$$\mu = \mu_0 + \frac{PL}{AE} \quad (13)$$

Considerando o deslocamento de cada nó do modelo por elementos finitos, temos:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{PL}{6AE} \quad (14)$$

$$\mu_3 = \mu_2 + \frac{PL}{4AE}$$

$$\mu_4 = \mu_3 + \frac{PL}{2AE}$$

Para a divisão em três elementos mantendo os x do método matemático temos:

$$u\left(\frac{L}{3}\right) = 0 + 0,0555 \frac{PL}{AE} \quad (15)$$

$$u\left(\frac{2L}{3}\right) = 0,0555 \frac{PL}{AE} + 0,0833 \frac{PL}{AE} = 0,1388 \frac{PL}{AE} \quad (16)$$

$$u(L) = 0,1388 \frac{PL}{AE} + 0,166 \frac{PL}{AE} = 0,305 \frac{PL}{AE} \quad (17)$$

2.7 COMPARATIVO ENTRE SOLUÇÕES

Observa-se comparando os dois métodos que os resultados, apesar de calculados de formas diferentes obtiveram resultados aproximados, a tabela a seguir mostra essa informação com facilidade.

Tabela 1 – Comparativo dos valores

Método Matemático	MEF
$0,0560 \frac{PL}{AE}$	$0,0555 \frac{PL}{AE}$
$0,1412 \frac{PL}{AE}$	$0,1388 \frac{PL}{AE}$
$0,3243 \frac{PL}{AE}$	$0,3050 \frac{PL}{AE}$

Fonte: Próprias autoras, 2018.

Vale ressaltar que a análise pelo método matemático por mecânica dos materiais requer, pensando em programação numérica muito mais da capacidade do computador.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no objetivo de estudar a ferramenta numérica do método dos elementos finitos ressaltando a importância dentro do avanço tecnológico da engenharia civil, este trabalho cumpriu o objetivo, visto que se trata de cálculo matemático de desempenho teórico avançado.

Apesar da dificuldade em modelagem numérica por meio do método de elementos finitos, observa-se por meio deste estudo que quando aplicado em determinadas estruturas o ganho em tempo e capacidade de cálculo em linguagem de programação é muito maior comparado com a forma analítica.

Vale ressaltar a importância do desenvolvimento do método a nível de graduação, visto que a ferramenta não auxilia somente em carreira acadêmica como também em tomada de decisão em situações reais de campo.

Para trabalhos futuros sugere ampliar a pesquisa e voltar o método para modelagem numérica utilizando alguma plataforma programável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, S. R. M., **Método dos elementos finitos**. Faculdade Federal de Goiás. Goiânia/Go, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 6118:2003 - Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2004.

AZEVEDO, A. F. M., **Método dos elementos finitos**. 1 ed, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto/Pt, 2003.

BENTO, D. A., **Fundamentos de resistência dos materiais**. Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina. Florianópolis/SC, 2003.

COOK, R. D. MALKUS, D. S. PLESHA, M. E. WITT, R. J., **Concepts and applications of finite element analysis**. 4 ed, University of Wisconsin/Madison, 2001.

FELIPPA, C. A., **Introduction to finite element methods**. University of Colorado at Boulder, 2004.

PINTO, F. A. A., **Vigas Notas de aula**. Universidade Federal do Paraná, 2000.

MARTHA, L. F., **Análise de Estruturas: conceitos e Método Básicos**. Ed. Elsevier, 2010.

RAO, S. S., **The finite element method in engineering**. 3 ed, USA: Butterworth-Heinemann, 1999.

SOUZA, M. F. S. M., RODRIGUES, R. B., **Sistemas Estruturais de edificações e exemplos**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas/SP, 2008.