Material Didático do Curso de Engenharia Mecânica da UniEVANGÉLICA

Disciplina: Cálculo II

Docente(s): Carlos Eduardo Fernandes
Cláudia Gomes de Oliveira Santos
Ricardo Wobeto

Volume 01, 2018

Centro Universitario de Anápolis - UniEVANGÉLICA

CÁLCULO II – ENGENHARIAS – *AULA 1*

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

FUNÇÕES IMPLÍCITAS E EXPLÍCITAS

Até agora, estudamos funções que envolvem duas variáveis que se apresentam de forma explícita: **y = f(x)**, isto é, uma das variáveis é fornecida de forma direta (explícita) em termos da outra.

Por exemplo: $\begin{cases} \mathbf{y = 4x - 5} \\ \mathbf{s = -25t^2 - 18t} \\ \mathbf{u = 9w - 35w^2} \end{cases}$

Nelas dizemos que **y**, **s**, e **u** são funções de **x**, **t** e **w**, **EXPLICITAMENTE**. Muitas funções, porém, apresentam-se na forma implícta, veja o exemplo abaixo:

- Ache a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função **xy = 1.**

$\frac{dy}{dx}$: Derivada de **y** em relação à **x**.

RESOLUÇÃO: Nesta equação, **y** esta definida **IMPLICITAMENTE** como uma função de **x**. Podemos obter, portanto, a equação em relação à **y** e daí diferencia-la.

- **xy = 1** (**Forma implícita**)
- **y =** $\frac{1}{x}$ (**Escrever a relação** y **em função de** x)
- **y = x**$^{-1}$ (**Escrever sob nova forma**)
- $\frac{dy}{dx}$ **= - x**$^{-2}$ (**Derivar em relação a** x)
- $\frac{dy}{dx}$ = - $\frac{1}{x^2}$ (**Simplificar**)

Este processo só é possível quando podemos explicitar facilmente a função dada, o que não ocorre, por exemplo, com $\mathbf{y^4 + 3xy + 2\ln y = 0}$**.**

Para tanto, podemos utilizar um método chamado **DERIVAÇÃO** (OU DIFERENCIAÇÃO) **IMPLÍCITA**, que nos permite derivar uma função sem a necessidade de explicitá-la.

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Esta derivação é feita em relação a **x**. Resolvendo normalmente as derivadas que envolvam apenas **x**. Quando derivamos termos que envolvem **y**, aplicaremos a **Regra da Cadeia**, uma vez que **y** é uma função de **x**.

Exemplos:

1) $2x + y^3$

Resolução :

Sendo **y** uma função de **x**, devemos aplicar a regra da cadeia para diferenciar em relação a **x**, daí :

$$\frac{d}{dx}(2x+y^3)=\frac{d}{dx}(2x)+\frac{d}{dx}(y^3)=\boxed{2+3y^2\frac{dy}{dx}}$$

2) $x + 3y$

Resolução : $\frac{d}{dx}(x+3y)=\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}(3y)=\boxed{1+3\frac{dy}{dx}}$

3) xy^2

Resolução : $\frac{d}{dx}(xy^2)=1.y^2+x.\frac{d}{dx}(y^2)=\boxed{y^2+2xy\frac{dy}{dx}}$

4) $4x^2 + 9y^2 = 36$

Resolução :

$$\frac{d}{dx}(4x^2+9y^2=36)\Leftrightarrow 8x+\frac{d}{dx}(9y^2)=0\Leftrightarrow 18y\frac{dy}{dx}=-8x\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-8x}{18y}\Leftrightarrow\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-4x}{9y}}$$

5) $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + x + y = 1$

6) $x^2y^5 = y + 3$

7) $x^2 + y^2 = 1$

8) $x^2 + 5y^3 - x = 5$

9) $x^3 - y^3 - 4xy = 0$

10) $x^2y + 3xy^3 - 3 = x$

11) $x^2 + 4y^2 = 4$

12) $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

13) $x - \dfrac{y}{x} = 2$

14) $x^3y^3 - y = x$

15) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 9$

16) $tgy = xy$

17) $e^y = x + y$

18) $a\cos^2(x + y) = b$

19) $xy - \ln y = 2$

EXTRA : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x-y}{x+y}$

==

==

<u>CÁLCULO II</u> **– ENGENHARIAS –** ***<u>AULA 2</u>***

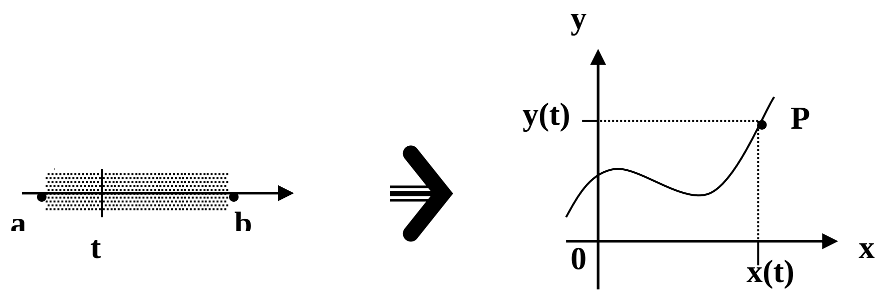
DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA PARAMÉTRICA

<u>Função na forma paramétrica</u>

Sejam $\textbf{(I)}\ \begin{cases} \mathbf{x = x(t)} \\ \mathbf{y = y(t)} \end{cases}$ duas funções da mesma variável **t**, com $\mathbf{t \in [\,a, b\,]}$; a cada valor de **t**, temos **x** e **y** definidos.

Caso as funções **x = x(t)** e **y = y(t)** sejam contínuas, quando **t** varia de **a**, **b**; o ponto **P (x(t), y(t))** decreve uma curva no plano, onde **t** é o parâmetro.

<u>Exemplo</u> :



Suponhamos a função **x = x(t)** <u>inversível</u>, temos **t = t(x)** a inversa de **x = x(t)** e podemos escrever **y = y[t(x)]** e **y** define-se como função de **x** na **FORMA PARAMÉTRICA**.

Eliminamos **t** de **(I)** e obtemos **y =y(x)** na **FORMA ANALÍTICA** usual.

<u>Exemplos</u> :

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} \mathbf{x = 2t + 1} \\ \mathbf{y = 4t + 3} \end{cases} \xrightarrow{\ \mathbf{t}\text{ em função de }\mathbf{x}\ } \mathbf{t = \frac{1}{2} \cdot (\,x - 1\,)}$$

Aplicando **t** em **y**, temos : $y = 4.\left(\mathbf{\frac{1}{2} \cdot (\,x - 1\,)}\right) + 3 \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 3\ \therefore\ \boxed{\mathbf{y = 2x + 1}}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x = a.cost} \\ \mathbf{y = a.sent} \end{cases}$ **; t $\in$ [0; 2π]** $\Longrightarrow$ Equação da Circunferência com centro **(0, 0)** e raio **a**

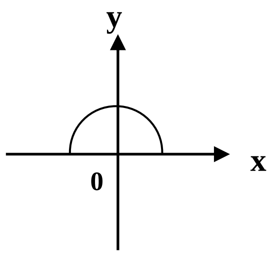
Elevando-se ambas as as equações ao quadrado e somando, temos :

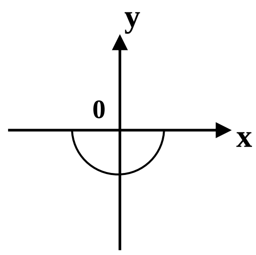
$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \text{sen}^2 t \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 . 1 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}}$

► Nota-se que a equação acima **NÃO É UMA FUNÇÃO y(x)** na forma paramétrica (**x = a.cost** **<u>não é inversível</u> em [0, 2π]**). Daí vamos obter uma ou mais funções do tipo **y = y(x)** na forma paramétrica ao restringirmos o domínio.

Logo, temos :

$\begin{cases} \mathbf{x = a.cost} \\ \mathbf{y = a.sent} \end{cases}$ **; t $\in$ [0; π]** **OU** $\begin{cases} \mathbf{x = a.cost} \\ \mathbf{y = a.sent} \end{cases}$ **; t $\in$ [π ; 2π]**





$\boxed{y = \sqrt{a^2 - x^2}}$

$\boxed{y = -\sqrt{a^2 - x^2}}$

Derivada de uma função na forma paramétrica

Seja **y** uma função de **x** definida pelas **equações paramétricas** :

$$\begin{cases} \mathbf{x = x(t)} \\ \mathbf{y = y(t)} \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{t} \in \mathbf{[\ a;\ b\ ]} \quad \text{temos} \quad \boxed{\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \dfrac{\mathbf{y'(t)}}{\mathbf{x'(t)}}}$$

♦ A fórmula que perrmite calcular a derivada $\dfrac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ sem conhecer explicitamente **y** como função de **x**.

Exemplos :

1) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ da função **y(x)** definida na, **forma paramétrica**, pelas equações :

a) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}$

Resolução :

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{(4t+3)'}{(2t+1)'} = \dfrac{4}{2} = \boxed{\mathbf{2}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{(9t^2 - 6t)'}{(3t-1)'} = \dfrac{18t - 6}{3} = \dfrac{18t}{3} - \dfrac{6}{3} = \boxed{\mathbf{6t - 2}}$ ♣

OBS : Note,no item **b**, que a resposta está em função de **t**, caso quisermos a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ em função de **x**, devemos determinar **t = t(x)** e substituir em ♣**,** daí temos :

x = 3t – 1 $\Leftrightarrow$ **x + 1 = 3t** $\Leftrightarrow$ **t =** $\dfrac{(x+1)}{3}$; substituindo **t** em ♣ **,** obtemos a seguinte expressão **6**.$\left[\dfrac{(x+1)}{3}\right]$ **- 2 = 2 (x + 1) – 2 = 2x + 2 – 2 ,** portanto $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \mathbf{2x}}$.

2) Idem para $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\text{sen}^3 t \end{cases}$; $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Resolução :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(4\text{sen}^3 t)'}{(4\cos^3 t)'} = \frac{12\text{sen}^{\cancel{2}} t.\cancel{\cos t}}{-12\cos^{\cancel{2}} t.\cancel{\text{sen}\,t}} = -\frac{\text{sen}\,t}{\cos t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \mathbf{-\ tg(t)}}$$

OBS : Temos que tomar muita atenção quanto aos intervalos de validade das respostas obtidas. Note que x'(t) **deve ser diferente de zero**, pois está operando como **denominador** da expressão acima, portanto concluímos que para fazermos as simplificações indicadas, temos que considerar **t** $\ne$ **0** e **t** $\ne \dfrac{\pi}{2}$ pois **sen 0 = 0** e **cos** $\dfrac{\pi}{2}$ **= 0,** note que apesar de **t** pertencer ao intervalo $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, efetivamente estão excluídos os valores de **t** já mencionados.

EXERCÍCIOS :

◙ Calcular a derivada **y' =** $\dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas na **forma paramétrica.**
◙ Para quais valores de **t** a derivada y' **está definida** ?

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ **;** $t \in \,]\,0; +\infty[$

2) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\text{sen}\,t \end{cases}$ **;** $t \in [\,\pi\,; 2\pi\,]$

3) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5 \end{cases}$ **;** $-\infty < t < +\infty$

4) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \text{sen}^3 t \end{cases}$ **;** $t \in \,]-\dfrac{\pi}{2}; 0\,[$

5) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \text{sen}\,2t \end{cases}$ **;** $t \in [\,0; \dfrac{\pi}{2}\,]$

6) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\text{sen}^3 t \end{cases}$ **;** $t \in [0;\ \pi\,]$

<u>CÁLCULO II</u> **– ENGENHARIAS –** ***<u>AULA 3</u>***

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

<u>Introdução</u> :

Consideremos os seguintes enunciados :

1) O volume **V** de um cilindro é dado por $\boxed{\mathbf{V} = \pi \mathbf{r^2 h}}$, onde **r** : raio e **h** : altura.

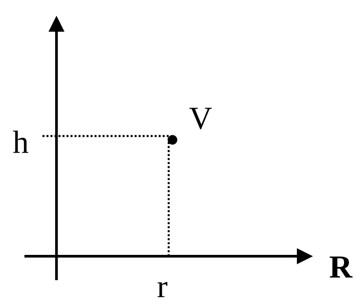
2) A equação de estado de um gás é dada por $\boxed{P = \dfrac{n.r.T}{V}}$, onde temos :

P : Pressão
V : Volume
n : Massa gasosa em moles
r : Constante molar do gás
T : Temperatura

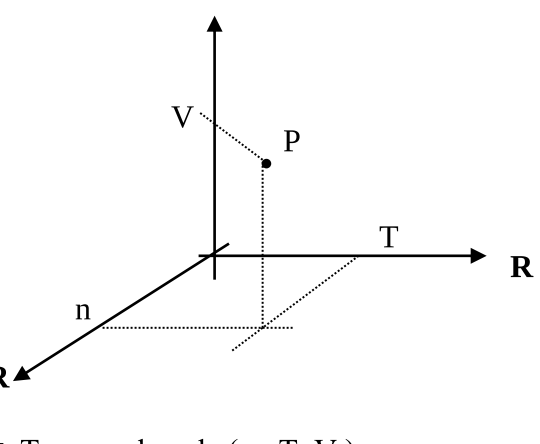
Numa breve análise destes enunciados, verificamos que as funções envolvidas requerem o uso de duas ou mais variáveis independentes.

Em $\begin{cases} \textbf{1) } \text{Temos } \mathbf{V : V_{(r,\,h)} = \pi r^2 h} \\ \textbf{2) } \text{Temos } \mathbf{P : P_{(n,\,T,\,V)}} = \dfrac{n.r.T}{V} \quad \textbf{(} \text{ Lembrar que r é constante } \textbf{)} \end{cases}$

<u>Graficamente</u> :



◙ Par ordenado (r, h) no plano
$\mathbf{R^2 = R} \times \mathbf{R}$.



◙ Terna ordenada (n, T, V) em
$\mathbf{R^3 = R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

OBS. : O estudo das funções de três, ou mais, variáveis difere pouco do estudo de funções de duas variáveis, logo, vamos trabalhar mais com estas, salientando as diferenças.

Função de várias variáveis

Definição : Seja **A** um conjunto do espaço n-dimensional ($\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$), isto é, os elementos de **A** são **n-uplas** ordenadas **(** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ **)** de números reais, se a cada ponto **P** do conjunto **A** associamos um único elemento $\mathbf{z} \in \mathbf{R}$, temos a função a qual está definida como $f : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$.

Essa função é chamada de **Função de n variáveis reais** e denotamos : **z = f(P)** ou **z = f (** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ **).**

O conjunto **A** é denominado Domínio da função **z = f(P)**. As notações são, em geral, do tipo :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x, y) = x^2 + xy \\ \bullet\ f(x, y) = e^{x+y} \end{array}\right\} \textbf{ Duas variáveis}$$

● $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ (**Três variáveis**)

Para efetuar cálculos temos, por exemplo :

● $f(\mathbf{2}, \mathbf{3})$ para $\mathbf{f(x, y) = 2x^2 - y^2} \Leftrightarrow 2.(\mathbf{2})^2 - (\mathbf{3})^2 = \mathbf{-1}$

● $f(\mathbf{0, -1, 4})$ para $\mathbf{f(x, y, z) = e^x.(y + z)} \Leftrightarrow e^{\mathbf{0}}.(\mathbf{-1} + \mathbf{4}) = \mathbf{3}$

GRÁFICOS

Uma função de duas variáveis pode ser representada graficamente como uma superfície no espaço, fazendo-se **z = f (x, y)**. Ao fazer o gráfico de uma função de **x** e **y**, tenha em mente que, embora o gráfico seja **tridimensional**, o domínio da função é **bidimensional** – consiste nos pontos do plano **xy** para os quais a função é definida.

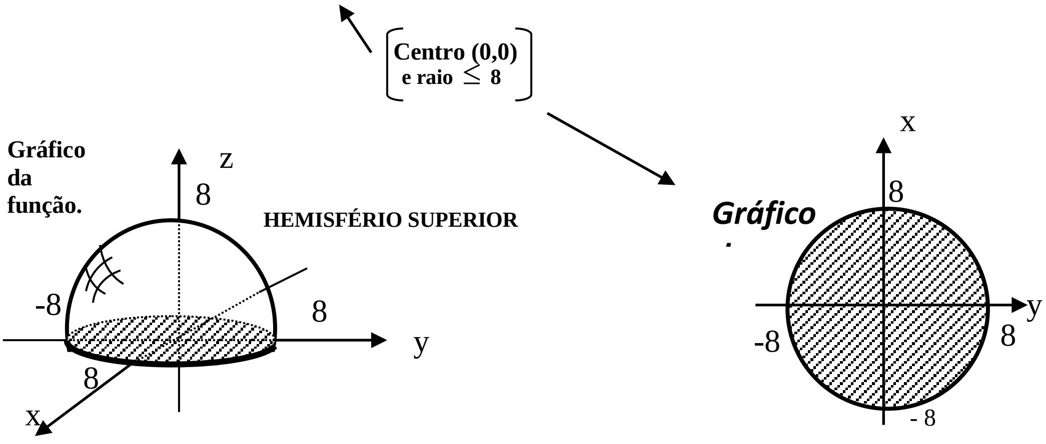
Exemplos :

1) Determine o domínio e a imagem da função **f (x,y) =** $\sqrt{64 - x^2 - y^2}$ **.**

Resolução:

$$64 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 64 \therefore D_f = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 64\}$$

Temos pois : $x^2 + y^2 \leq 8^2$ (**círculo**) logo, $\text{Im}_f = \{z \in R : 0 \leq z \leq 8\}$ ou $\text{Im}_f = [\,0; 8\,]$.



2) Determine o Domínio para **g(x, y, z) =** $\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ **,** e esboce o gráfico do domínio.

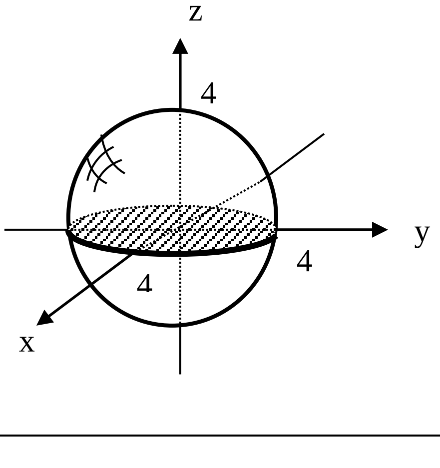
Resolução:

$$16 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$$

$$\therefore$$

$$D(z) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$$

__**Gráfico do Domínio**__ **:**



◙ Nota-se que o **gráfico da função** seria **quadridimensional**, não podendo, portanto, ser esboçado.

---

3) Idem para $w = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Resolução :

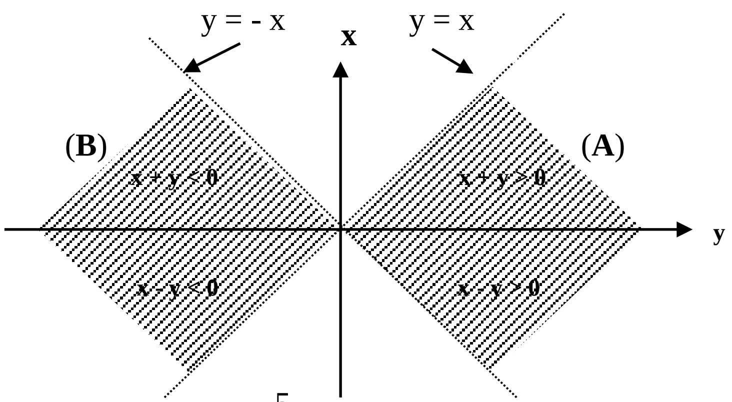
$\begin{cases} x + y > 0 \ \textbf{e} \ x - y > 0 \quad (\textbf{A}) \\ \end{cases}$

$x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (x + y).(x - y) > 0 \Leftrightarrow$ **OU**

$x + y < 0$ **e** $x - y < 0$ (**B**)

Logo : $\boxed{\mathbf{D(w)} = \{(x, y) \in R^2 \mid (x+y).(x-y) > 0\}}$

<u>Gráfico do Domínio</u> :



4) Ache o domínio da função **w =** $\dfrac{5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \in$ **R**.

<u>Resolução</u> :

Para **w** pertencente a **R** temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \neq 0$, logo :

$\mathbf{D}_w = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \neq 0 \}$.

<u>Exercícios</u> :

1) Determine o domínio das seguintes funções :

a) $z = xy$

b) $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

d) $z = \dfrac{x}{y^2 + 1}$

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

f) $z = \ln\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

g) **z** = **e** $^{\frac{x}{y}}$

h) **y** = $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+z}}$

i) **w** = $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$

j) **z** = **ln** $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

<u>CÁLCULO II</u> **– ENGENHARIAS –** ***<u>AULA 4</u>***

<u>DERIVADAS PARCIAIS</u>

As aplicações das funções de **várias variáveis** procuram determinar como variações de uma das variáveis afetam os valores das funções. Por exemplo, um economista que deseja determinar o efeito de um aumento de impostos na economia pode fazer seus cálculos utilizando diferentes taxas de imposto, mantendo constantes outras variáveis, como desemprego, etc.

Analogamente, determinamos a taxa de variação de uma função **f** em relação a uma de suas **variáveis independentes**, que nada mais é que achar a derivada de **f** em relação a uma de suas variáveis independentes.

Este processo chama-se **<u>DERIVADA PARCIAL</u>**.

Uma função de várias variáveis tem tantas " **parciais** " quantas são suas variáveis independentes.

<u>FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS</u>

<u>Derivadas parciais</u>

Se **z = f(x,y)**, então **<u>derivadas parciais de primeira ordem de f em relação a x e y</u>** são funções $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, definidas como segue :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} & \textbf{y constante} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} & \textbf{x constante} \end{cases}$$

Efetivamente, ao derivarmos parcialmente uma função, deriva-se em relação a uma variável, considerando-se as demais, constantes !!!

Exemplos :

1) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ para a função **z = 3x – x²y² + 2x³y**.

Resolução :

◙ $\frac{\partial z}{\partial x}$ = 3-2xy² + 6x²y

◙ $\frac{\partial z}{\partial y}$ = - 2x² y+ 2x³

---

2) Idem para **g(x,y) =** $\sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

Resolução :

◙ $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}$

◙ $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}.2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2}}$

---

3) Idem para **z = sen (2x + y)**

Resolução :

◙ $\frac{\partial z}{\partial x}$ = cos (2x + y) . 2 = 2.cos (2x + y)

◙ $\frac{\partial z}{\partial y}$ = cos (2x + y) . 1 = cos (2x + y)

---

4) Idem para **f(x,y) = 2x²y + 3xy² - 4x**

Resolução :

◙ $\frac{\partial f}{\partial x}$ = 4xy + 3y² - 4

◙ $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 2x² + 6xy

---

5) Idem para **f(x,y) =** $\begin{cases} \frac{2xy}{3x^2+5y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Resolução :

PARA (x, y) ≠ (0, 0)
================

◙ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2y).(3x^2+5y^2)-(2xy).(6x)}{(3x^2+5y^2)^2} = \frac{6x^2y+10y^3-12x^2y}{(3x^2+5y^2)^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-6x^2y+10y^3}{(3x^2+5y^2)^2}$

◙ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(2x).(3x^2+5y^2)-(2xy).(10y)}{(3x^2+5y^2)^2} = \frac{6x^3+10xy^2-20xy^2}{(3x^2+5y^2)^2} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-10xy^2+6x^3}{(3x^2+5y^2)^2}$

PARA (x, y) = (0, 0)
================

$\nearrow$ 0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2x.0}{3x^2 + 5.0^2} - 0}{x} \overset{L'H}{=} 0 \\[2em] \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\cancelto{0}{\dfrac{2.0.y}{3.0^2 + 5y^2}} - 0}{y} \overset{L'H}{=} 0 \end{cases}$$

Resumindo :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{-6x^2y + 10y^3}{(3x^2 + 5y^2)^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\[1.5em] 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{-10xy^2 + 6x^3}{(3x^2 + 5y^2)^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\[1.5em] 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

NOTAÇÕES :

◙ **Derivadas parciais de primeira ordem** :

Seja **z = f (x,y) :**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = z_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\right] \\[1.5em] \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = z_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)\right] \end{cases}$$

◙ **Os valores das derivadas parciais de primeira ordem no ponto (a, b)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(a,b)} = f_x(a,b) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(a,b)} = f_y(a,b) \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

Derivada parcial de 2ª ordem em relação a **x**

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}$$

Derivada parcial de 2ª ordem em relação a **y**

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

Derivadas parciais de 2ª ordem mistas

OBS. : Quando a função **z = f(x,y)** é **contínua**, então $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

<u>Exemplo</u> :

Determine as derivadas parciais de 2ª ordem de **z = ln (x² + y²)**.

Resolução :

♦ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{*}{\Rightarrow} \dfrac{2x}{x^2+y^2} \overset{**}{\Rightarrow} \dfrac{2.(x^2+y^2)-2x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

♠ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{*}{\Rightarrow} \dfrac{2y}{x^2+y^2} \overset{**}{\Rightarrow} \dfrac{2.(x^2+y^2)-2y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

♥ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) \overset{*y}{\Rightarrow} \dfrac{2y}{x^2+y^2} \overset{**x}{\Rightarrow} \dfrac{0.(x^2+y^2)-2y.2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

♣ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) \overset{*x}{\Rightarrow} \dfrac{2x}{x^2+y^2} \overset{**y}{\Rightarrow} \dfrac{0.(x^2+y^2)-2x.2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

<u>Exercícios</u> :

Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das funções abaixo :

1) z = e^x.cos y

2) z = $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

3) z = arctg (x² + y²)

4) z = $\dfrac{3xy}{x+2y}$

CÁLCULO II **– ENGENHARIAS -** ***AULA 6***

APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS

1) Regra de Laplace (Laplaciano)

Seja **z** = **f(x,y)** uma função de duas variáveis e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ suas "parciais" de segunda ordem, chamamos de **LAPLACIANO**, a seguinte expressão :

$$\boxed{\Delta_z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0}$$

Analogamente, para **w** = **f(x,y,z)** temos o **LAPLACIANO** :

$$\boxed{\Delta_w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0}$$

Nestes casos, dizemos que **z** e **w** (Respectivamente) satisfazem a **Regra** (**ou Equação**) **de Laplace**.

Exemplos :

● Verifique se as funções dadas satisfazem a **Regra** (**ou Equação**) **de Laplace**.

a) w = x² -2y² +z²

Resolução :

$$\left.\begin{array}{l} ☺\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \overset{*}{\Rightarrow} 2x \overset{**}{\Rightarrow} 2 \\ \\ ☺\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \overset{*}{\Rightarrow} -4y \overset{**}{\Rightarrow} -4 \\ \\ ☺\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \overset{*}{\Rightarrow} 2z \overset{**}{\Rightarrow} 2 \end{array}\right\} \quad \therefore \Delta_w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2 - 4 + 2 = 0$$

Logo **w** satisfaz à **Laplace**.

b) Idem para **z = e^x.seny**

Resolução :

☺ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{*}{\Rightarrow} e^x.\text{sen}\, y + e^x.0 = e^x.\text{sen}\, y \overset{**}{\Rightarrow} e^x.\text{sen}\, y + e^x.0 = e^x.\text{sen}\, y$

☺ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{*}{\Rightarrow} 0.\text{sen}\, y + e^x.\cos y = e^x.\cos y \overset{**}{\Rightarrow} 0.\cos y - e^x.\text{sen}\, y = -e^x.\text{sen}\, y$

$\therefore \Delta_z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x.\text{sen}\, y - e^x.\text{sen}\, y = 0$; logo **z** satisfaz à **Laplace**

<u>**Exercício**</u> :

● Idem para **w =** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Resolução :

2) <u>Diferencial Total</u> (ou Derivada Total)

Seja **z = f(x,y)** uma função de duas variáveis e $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ as " parciais " de **z = f(x,y)**, chamamos de **<u>Diferencial (ou Derivada) Total</u>** a seguinte expressão :

$$\Delta_z = \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta_x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta_y \qquad \textbf{OU} \qquad \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}}$$

Analogamente, para **w = f(x,y,z)** temos :

$$\Delta_w = \frac{\partial w}{\partial x}.\Delta_x + \frac{\partial w}{\partial y}.\Delta_y + \frac{\partial w}{\partial z}.\Delta_z \qquad \textbf{OU} \qquad \boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}}$$

<u>Exemplos</u> :

● Calcule a expressão do Diferencial Total de :

1) $z = 3x^2y + \ln(x^2y^3)$

Resolução :

◙ $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + \frac{2xy^3}{x^2y^3} = 6xy + \frac{2}{x}$

◙ $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + \frac{3x^2y^2}{x^2y^3} = 3x^2 + \frac{3}{y}$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \left(6xy + \frac{2}{y}\right)\frac{dx}{dt} + \left(3x^2 + \frac{3}{y}\right)\frac{dy}{dt}$$

2) Idem para **z =** $\dfrac{2xy}{x^2-3y^2}$

Resolução :

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y.(x^2-3y^2)-2xy.2x}{(x^2-3y^2)^2} = \dfrac{2x^2y-6y^3-4x^2y}{(x^2-3y^2)^2} = \dfrac{-6y^3-2x^2y}{(x^2-3y^2)^2}$

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x.(x^2-3y^2)-2xy.(-6y)}{(x^2-3y^2)^2} = \dfrac{2x^3-6xy^2+12xy^2}{(x^2-3y^2)^2} = \dfrac{2x^3+6xy^2}{(x^2-3y^2)^2}$

$\therefore \dfrac{dz}{dt} = \left[\dfrac{-6y^3-2x^{2y}}{\left(x^2-3y^2\right)^2}\right]\dfrac{dx}{dt} + \left[\dfrac{2x^3+6xy^2}{\left(x^2-3y^2\right)^2}\right]\dfrac{dy}{dt}$

<u>**Exercícios**</u> **:**

1) Idem para **z = $x^3.e^{3x+4y^2}$**

2) Idem para **z = $3x^2y$.sen (2x + 3y)**

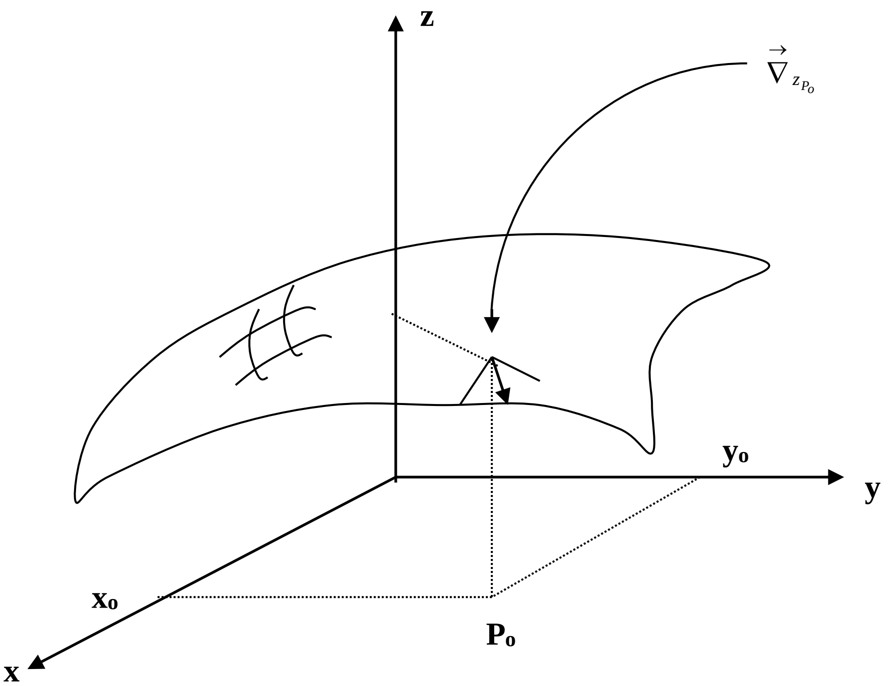
3) Idem para **z = sec ($x^2 + 2xy^3$)**

3) <u>Vetor Gradiente</u>

Seja **z = f(x,y)** uma função de duas variáveis e $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ as " parciais " de **z = f(x,y)**.

Seja $\mathbf{P_o}$ $\mathbf{(x_o, y_o)}$, um ponto do plana e $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_o}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_o}$ as derivadas calculadas no ponto $\mathbf{P_o}$, chamamos de **<u>Vetor Gradiente</u>** ao seguinte vetor :

$$\boxed{\vec{\nabla} z_{P_o} = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_o}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_o} \right)}$$



O **Vetor Gradiente** aponta para onde
z = f(x,y) tem maior velocidade.

Exemplos :

● Determine o **vetor gradiente** das funções abaixo no ponto $\mathbf{P_o}$.

1) z = ln ($x^2 + y^2$) em $\mathbf{P_o}$ **(0, 1)**.

Resolução :

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \dfrac{2.0}{0^2+1^2} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla} z_{(0,1)} = (\ 0,\ 2\ )}$

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \dfrac{2.1}{0^2+1^2} = \dfrac{2}{1} = 2$

2) z = x.sen y em $\mathbf{P_o}$ **(1,** $\dfrac{\pi}{2}$ **)**.

Resolução :

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1.\text{sen}\, y + x.0 = \text{sen}\, y \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$

$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla} z_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = (\ 1,\ 0\ )}$

◙ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.\text{sen}\, y + x.\cos y = x.\cos y \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = 1.\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

Exercícios :

1) Idem para **z = $3.x^2y^3.e^{2xy}$** em $\mathbf{P_o}$ **(1, -1)** .

2) Idem para **z =** $\dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^3}$ em **P_o (-1, 1)** .

DERIVADA DIRECIONAL (Inclinação)

Se **z = f(x,y)** é uma função diferenciável de **x** e **y** com $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ um vetor unitário, então a **derivada direcional de f na direção de u** é denotada por :

$$\boxed{D_u z = \frac{\partial z}{\partial x} . u_1 + \frac{\partial z}{\partial y} . u_2} \qquad (\text{ I })$$

Seja o vetor gradiente $\vec{\nabla} z_{(x_0, y_0)}$ temos que a derivada direcional é a direção assumida pelo vetor gradiente quando "aplicado" no vetor unitário **u**, logo, para calcularmos a derivada direcional temos o vetor decomposto em $\vec{\nabla} z_P = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$ e combinado com a equação **(I)** chegamos em :

$$\boxed{D_u z = \vec{\nabla} z_P . \mathbf{u}}$$

Produto Escalar

Exemplos :

1) Ache a derivada direcional de **f(x,y) = 3x²y** no ponto **(1, 2)** na direção **a = 3i + 4j**.

<u>Resolução</u> :

Como **a** <u>não é</u> vetor unitário, temos que **normaliza-lo**, daí :

• u = $\frac{1}{\|a\|}.a = \frac{a}{\|a\|} = \frac{3i+4j}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} = \frac{3i+4j}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3i}{\sqrt{25}} + \frac{4j}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow u = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$

Logo :

$$\vec{\nabla}z_{(1,2)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)} i + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} j = 6xy\Big|_{(1,2)} i + 3x^2\Big|_{(1,2)} j = (6.1.2)i + (3.1)j \Leftrightarrow \vec{\nabla}z_{(1,2)} = 12i + 3j$$

Portanto : $\mathbf{D_u z} = \vec{\nabla}z_P\,\mathbf{.u} = (12i+3j).\left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j\right) = 12.\frac{3}{5} + 3.\frac{4}{5} = \frac{36}{5} + \frac{12}{5} \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{D_u z} = \frac{48}{5}}$

2) Ache a derivada direcional de **f(x,y) = x³y²** no ponto **(-1, 2)** na direção **a = 4i - 3j**.

<u>Resolução</u> :

Como **a** <u>não é</u> vetor unitário, temos que **normaliza-lo**, daí :

• u = $\frac{1}{\|a\|}.a = \frac{a}{\|a\|} = \frac{4i-3j}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} = \frac{4i-3j}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4i}{\sqrt{25}} - \frac{3j}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow u = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j$

Logo :

$$\vec{\nabla}z_{(-1,2)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,2)} i + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,2)} j = 3x^2y^2\Big|_{(-1,2)} i + 2x^3y\Big|_{(-1,2)} j = 3(-1)^2(2)^2 i + 2(-1)^3.2j \Leftrightarrow \vec{\nabla}z_{(-1,2)} = 12i - 4j$$

Portanto : $\mathbf{D_u z} = \vec{\nabla}z_P\,\mathbf{.u} = (12i-4j).\left(\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j\right) = 12.\frac{4}{5} + 4.\frac{3}{5} = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = \frac{60}{5} \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{D_u z} =}$
12

<u>Exercícios</u> :

1) Ache a derivada direcional de **f(x,y) = e$^{\mathbf{2xy}}$** , **P (4, 0)** e **u =** $-\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$.

2) Idem para **z = x^2 - 5xy + $3y^2$** , **P (3, -1)** e **u** = $\frac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$.

3) Idem para **f(x,y) =** $\sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, **P (3, -2)** e **a = i + 5j** .

4) Idem para **f(x,y) = x$\cos^2$y** , **P (2,** $\frac{\pi}{4}$ **)** , **a = < 5, 1 > .**

5) Idem para **f(x,y) = arctg** $\frac{y}{x}$, **P (4, -4)** , **a = 2i – 3j** .

6) Idem para **f(x,y) = $4x^3y^2$**, **P (2, 1)** , **a = 3i – 4j** .

JACOBIANO

Estudando futuramente, no Cálculo IV, as integrais múltiplas, verificamos que um dos tópicos abordados é a chamada mudança de variáveis**, onde é tratado um conceito muito importante denominado** JACOBIANO**. Não faremos sua demonstração agora, porém, mostraremos o** JACOBIANO **como sendo mais uma aplicação das** derivadas parciais **estudadas em Cálculo III .**

Sendo a mudança de variável, mencionada anteriormente, dada pela transformação **T** do plano **uv** no plano **xy** : $\mathbf{T}_{(u,v)} = (x,y)$.

Resultamos, sem maiores demonstrações, no produto vetorial :

$$\boxed{\mathbf{r_u} \text{ x } \mathbf{r_v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} k}$$

Onde $\mathbf{r_u}$ e $\mathbf{r_v}$ são vetores tangentes à uma superfície **S** pertencente ao plano **uv**.

Chamamos pois de **JACOBIANO** da transformação **T** com **x = f(u,v)** e **y = g(u,v)** à equação :

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}}$$

OBS.: Se **T** for uma transformação de espaços, temos o **JACOBIANO** $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ análogo ...

Exemplos :

◙ Calcule os jacobianos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ para os casos abaixo :

a) $\begin{cases} \mathbf{x = u + 4v} \\ \mathbf{y = 3u - 5v} \end{cases}$

Resolução :

♦ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}.\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}.\dfrac{\partial y}{\partial u} = [1.(-5)] - (4.3) = -5 - 12 = -17$.

---

b) $\begin{cases} \mathbf{x = u + 2v^2} \\ \mathbf{y = 2u^2 - v} \end{cases}$

Resolução :

♠ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}.\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}.\dfrac{\partial y}{\partial u} = [1.(-1)] - (4v.4u) = -1 - 16uv$.

---

c) $\begin{cases} \mathbf{x = senu + cosv} \\ \mathbf{y = -cosu + senv} \end{cases}$

Cosseno da diferença

Resolução :

♥

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u} = (\cos u.\cos v) - (-\operatorname{sen} v.\operatorname{sen} u) = \cos u.\cos v + \operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v = \cos(u - v)$$

.

---

d) $\begin{cases} \mathbf{x = v.e^{-2u}} \\ \mathbf{y = u^2.e^{-v}} \end{cases}$

Resolução :

♣

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u} = \left[-2v.e^{-2u}.(-u^2.e^{-v})\right] - \left[e^{-2u}.2u.e^{-v}\right] = 2v.e^{-2u}.u^2.e^{-v} - e^{-2u}.2u.e^{-v} =$$

$$= 2u^2v.e^{-2u-v} - 2u.e^{-2u-v} = 2u.e^{-2u-v}.(uv-1) = 2u.(uv-1).e^{-(2u+v)} .$$

Exercícios :

◙ Calcule os jacobianos $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ para os casos abaixo :

a) $\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{u}{u+v} \\ \mathbf{y} = \dfrac{v}{u-v} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x = u^2 - v^2} \\ \mathbf{y = 2uv} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{2u}{u^2+v^2} \\ \mathbf{y} = \dfrac{-2v}{u^2+v^2} \end{cases}$

CÁLCULO II **– ENGENHARIAS –** ***AULA 8***

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

TEOREMA DO VALOR EXTREMO

Da mesma forma estudada no Cálculo II, vamos citar o **Teorema do Valor Extremo** para funções de duas variáveis.

> Seja **f(x,y)** uma função contínua em um conjunto fechado e limitado **R**, então **f** possui tanto **máximo** quanto **mínimo** absolutos em **R** .

EXTREMOS

No curso de Cálculo II aprendemos a determinar MÁXIMOS e mínimos de funções de uma variável. Hoje vamos, utilizando técnicas análogas, começar a aprender a determina-los a partir de funções de DUAS variáveis.

Analisando um gráfico de uma função f **de duas variáveis, podemos notar pontos altos e baixos em suas vizinhanças imediatas. Tais pontos são chamados de** máximos **e** mínimos relativos **de** f**, respectivamente.**

O mais alto **máximo dentro do domínio de** f **é chamado de** máximo absoluto**.**

O mais profundo **mínimo dentro do domínio de** f **é chamado de** mínimo absoluto**.**

Vamos defini-los, portanto, da seguinte maneira :

•**Seja a função** f(x,y)**, dizemos que ela possui** máximo relativo **em um ponto** P (x_0, y_0) **se existe um círculo centrado em** P **de modo que** $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ **para todo ponto** (x, y) **do domínio de** f **no** interior do círculo**, analogamente, ela possui um** máximo absoluto **em** P **se** $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ **para** todos os pontos (x, y) **do domínio de** f**.**

•**Seja a função** f(x,y)**, dizemos que ela possui** mínimo relativo **em um ponto** P (x_0, y_0) **se existe um círculo centrado em** P **de modo que** $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ **para todo ponto** (x, y) **do domínio de** f **no** interior do círculo**, analogamente, ela possui um** mínimo absoluto **em** P **se** $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ **para** todos os pontos (x, y) **do domínio de** f**.**

Obs. : Complementando o que já foi definido, se a função possui **máximo** ou **mínimo relativo**, dizemos que ela possui **extremo relativo** no ponto, e se ela possui **máximo** ou **mínimo absoluto**, diz-se que ela possui **extremo absoluto** no ponto.

DETERMINAÇÃO DOS EXTREMOS RELATIVOS

Para determinarmos os extremos relativos, verificamos que a função **f** tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em **(** x_0**,** y_0 **)** e que **f(** x_0**,** y_0 **)** é **extremo relativo** de **f**, daí tem-se o plano tangente ao gráfico de **z = f (x, y)** em **(** x_0**,** y_0**,** z_0 **)** paralelo ao plano **xy** com equação $z = z_0$.

Os **pontos críticos** de **f** são aqueles onde as "parciais" de primeira ordem são zero ou **f** não é diferenciável, daí temos a definição :

• Seja **f** uma função de duas variáveis, o ponto **(x_0, y_0)** é chamado de **crítico** se $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$ e $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$ ou se uma ou ambas derivadas parciais de primeira ordem não existirem em **(x_0, y_0)**.

Exemplo :

• Seja **f (x,y) = 1 + x² + y²**, com **x² + y² ≤ 4**. Ache os extremos de **f** .

Resolução :

Temos **x² + y² ≤ 4** o disco fechado **R** de raio 2 e centro (0, 0) no plano xy.
Daí, pela última definição :

Único

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \\ \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ (x, y) = (0, 0) , logo **f(x,y) = f (0,0) = 1**

Extremo Relativo

Veja o gráfico :

PONTO DE SELA

Um ponto **P (x_0, y_0, $f(x_0,y_0)$)** é chamado de **Ponto de Sela** se $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$, mas porém, a função não possui nem mínimo nem máximo relativo no ponto, pois numa direção ele se comporta como máximo e noutra como mínimo.

Veja o gráfico abaixo da função **$z = y^2 - x^2$** no ponto **P (0, 0)** temos **f (0, 0) = 0** comportando-se como **máximo** na direção de **x** e como **mínimo** na direção de **y** e note o formato do gráfico que lembra uma **sela**.

<u>TESTE DA SEGUNDA DERIVADA</u> (Para extremos relativos ou locais)

◙ Seja **f** uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais de segunda ordem contínuas em um círculo centrado em um ponto crítico (x_0,y_0) , temos o discriminante **D** ...

$$D = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} - \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right|_{(x_0,y_0)}$$

Se ...

♦ **D** > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ então, **f** tem **mínimo relativo** em **(x_0, y_0)** .

♠ **D** > 0 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ então, **f** tem **máximo relativo** em **(x_0, y_0)** .

♥ **D** < 0 então, **f** tem **ponto de sela** em **(x_0, y_0)** .

♣ **D** = 0 então, **nada** podemos concluir .

<u>Exemplos</u> :

1) Determine todos os pontos extremos e pontos de sela da função **$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$**.

Resolução :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{3}$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 8 = 0$.

- Substituindo x da primeira derivada na segunda ...

$$-2\left(\frac{y}{3}\right) + 2y = 8 \Leftrightarrow \frac{-2y}{3} + 2y = 8 \Leftrightarrow -2y + 6y = 24 \Leftrightarrow 4y = 24 \Leftrightarrow y = 6 .$$

- Substituindo y em x da primeira derivada ...

$x = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$, portanto temos **P** (**x_0, y_0**) = **P** (**2, 6**) **Único Ponto Crítico** .

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{*}{\Rightarrow} 6x - 2y \overset{**}{\Rightarrow} 6$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{*}{\Rightarrow} -2x + 2y - 8 \overset{**}{\Rightarrow} 2$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{*_y}{\Rightarrow} -2x + 2y - 8 \overset{**_x}{\Rightarrow} -2$.

$$\therefore \quad D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(2,6)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(2,6)} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\bigg|_{(2,6)} = 6.2 - (-2)^2 = 12 - 4 \Leftrightarrow \mathbf{D = 8} .$$

- $\begin{cases} \mathbf{D} = 8 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0 \end{cases}$ Temos portanto **Mínimo Relativo** .

- Logo f (**2, 6**) = -24 então o ponto **P’** (**2, 6, -24**) é **Ponto de Mínimo Relativo** de **f**.

---

2) Idem para **z = 4xy – x^4 – y^4** .

Resolução :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow y = x^3$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3 = 0$.

- Substituindo y da primeira derivada na segunda ...

$$4x - 4(x^3)^3 = 0 \Leftrightarrow 4x - 4x^9 = 0 \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} x - x^9 = 0 \Leftrightarrow x.(1 - x^8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ 1 - x^8 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^8 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[8]{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ ou \\ x = 1 \end{cases}.$$

- Logo, temos, para ...

x = -1	**x = 0**	**x = 1**
$y = x^3$	$y = x^3$	$y = x^3$
$y = (-1)^3$	$y = (0)^3$	$y = (1)^3$
$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$

Por tanto, temos os **pontos críticos** : $\begin{cases} \textbf{P (-1, -1)} \\ \textbf{Q (0, 0)} \\ \textbf{S (1, 1)} \end{cases}$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{*}{\Rightarrow} 4y - 4x^3 \overset{**}{\Rightarrow} -12x^2$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{*}{\Rightarrow} 4x - 4y^3 \overset{**}{\Rightarrow} -12y^2$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \overset{*_y}{\Rightarrow} 4x - 4y^3 \overset{**_x}{\Rightarrow} 4$.

- Como temos mais do que um ponto crítico, vamos montar uma tabela ...

Ponto Crítico (x_0, y_0)	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big\vert_{(x_0,y_0)}$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big\vert_{(x_0,y_0)}$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big\vert_{(x_0,y_0)}$	**D** $= \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial z}{\partial x \partial y}\right)^2$	**Conclusão**
(-1, -1)	-12 < 0	-12	4	-12 . (-12) - 4^2 = 128 > 0	

					Máximo Relativo
(0, 0)	0	0	4	$0 \,.\, 0 \,.\, - 4^2 = -16 < 0$	***Ponto* de Sela**
(1, 1)	$-12 < 0$	-12	4	$-12 \,.\, (-12) - 4^2 = 128 > 0$	**Máximo Relativo**

● Aplicando os pontos críticos na função **f (x,y)** temos :

P' (-1, -1, 2) **Ponto de Máximo Relativo** .

Q' (0, 0, 0) **Ponto de Sela** .

S' (1, 1, 2) **Ponto de Máximo Relativo**

.

NOTA :

Vimos nos **Exemplos 1** e **2** que ao determinarmos os pontos de **máximo** e **mínimo** relativos encontrávamos um ponto **P** $\in$ **R²**. Na verdade o que ocorre é que para este **P (x_0, y_0)** vamos associar um ponto **P' (** x_0, y_0, **f (x_0, y_0))** onde **f (x_0, y_0)** é o **verdadeiro extremo** máximo ou mínimo.

Daí :

◙ No exemplo **1**, temos :

f (x, y) = $3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

Mínimo Relativo em **P (2, 6)**

Logo temos : **f (x_0, y_0) = f (2, 6) =** $3.2^2 - 2.2.6 + 6^2 - 8.6$ **= 12 – 24 + 36 – 48** $\Leftrightarrow$ **f (2, 6) = -24**, portanto temos um ponto no espaço **P' (2, 6, -24)** com **z = f (x_0, y_0) = f (2, 6) = -24 (MÍNIMO RELATIVO)** .

◙ No exemplo **2**, temos :

z = $4xy - x^4 - y^4$

Máximo Relativo em **P (-1, -1)**

Sela em Q (0, 0)

Máximo Relativo em **P (1, 1)**

Logo :

◙ Para **P (-1, -1)** temos **z =** $4.(-1).(-1) - (-1)^4 - (-1)^4 = 4 - 1 - 1$ $\Leftrightarrow$ **z = 2** .

$\therefore$ **P' (-1, -1, 2)** é **PONTO DE MÀXIMO RELATIVO** de **f** .

◙ Para **Q (0, 0)** temos **z =** 4. (0).(0) – $(0)^4$ – $(0)^4$ = 0 – 0 – 0 $\Leftrightarrow$ **z = 0** .
$\therefore$ **Q' (0, 0, 0)** é **PONTO DE SELA** .

◙ Para **S (1, 1)** temos **z =** 4. (1).(1) – $(1)^4$ – $(1)^4$ = 4 – 1 – 1 $\Leftrightarrow$ **z = 2** .
$\therefore$ **S' (1, 1, 2)** é **PONTO DE MÀXIMO RELATIVO** de **f** .

EXERCÍCIOS :

Baseando-se nestas adaptações, vamos fazer *os* exercícios seguintes . . .

1) Localize todos os máximos e mínimos relativos e pontos de sela de :

a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$.

b) $f(x, y) = -x^2 - y^2 - 1$.

c) $f(x, y) = x + 2y - 5$.

2) Idem para $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$.

3) Idem para $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$.

EXERCÍCIOS EXTRAS :	**RESPOSTAS** :
1) Idem para $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$.	**P' (0, 0, 0) Pto. Mín. Rel.**
2) Idem para $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$.	**P' (1, -2, 1) Pto. De Sela**
3) Idem para $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.	**P' (2, -1, -3) Pto. Mín. Rel.**
4) Idem para $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2.x^{-1}.y^{-1}$.	**P' (-1, -1, 4)** e **Q' (1, 1, 4) Ptos. Mín. Rel.**
5) Idem para $f(x, y) = x^2 + y - e^y$.	**P' (0, 0, -1) Pto. Sela**
6) Idem para $f(x, y) = e^x.\text{sen}y$.	**Não existe Máx. ou Mín. Rel.**
7) Idem para $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$.	**P' (-1, 0, e) Pto. Máx. Rel.**

CÁLCULO II – ENGENHARIAS – *AULA 9*

DETERMINAÇÃO DOS EXTREMOS ABSOLUTOS EM CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS

- Seja **f** uma função contínua de duas variáveis em um conjunto fechado e limitado **R**, então **f** possuí extremo **máximo absoluto** e **mínimo absoluto** para algum ponto de **R .**

Teorema do Valor Extremo para funções de duas variáveis

Os pontos extremos absolutos de uma função, como mencionada no teorema acima, ocorrem em **pontos críticos** da função que se localizam no **interior** do conjunto (Região) **R,** ou em pontos na **fronteira** de **R** .

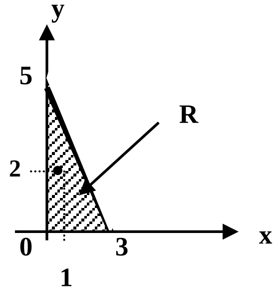
Vamos indicar, a seguir, um método para determinar os **máximos** e **mínimos absolutos** em conjuntos fechados e limitados **R** . . .

I) Determine os valores de **f** nos pontos críticos de **f** em **R**.
II) Determine todos os valores extremos de fronteira de **R**.
III) O **maior valor** encontrado resultante de **I** e **II** é o valor **máximo absoluto**;
o **menor valor** encontrado resultante de **I** e **II** é o valor **mínimo absoluto**.

Exemplos :

1) Determine os valores de máximo e mínimo absoluto de **f (x, y) = 3xy – 6x – 3y + 7** sobre a região triangular **R** com vértices **(0, 0)**, **(3, 0)** e **(0, 5)**.

Veja a figura :



Resolução :

● $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

∴ **P (1, 2)** é **Único Ponto Crítico** no interior de **R**.

● $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

● Vamos determinar os pontos de fronteira de **R** onde poderá ocorrer valores extremos :

Analisando cada segmento de reta limitado pelos vértices ...

◙ **Para o segmento (0, 0)** até **(3, 0)** temos **y = 0** para $0 \le x \le 3$.

u (x) = f (x, 0) = 3.x.**0** – 6x – 3.**0** + 7 = **-6x + 7**.

u' (x) = -6 $\neq$ **0**

portanto não há ponto crítico em **u (x)** , logo os extremos de **u** ocorrem nos pontos **(0, 0)** e **(3, 0)**.

◙ **Para o segmento (0, 0)** até **(0, 5)** temos **x = 0** para $0 \le y \le 5$.

v (y) = f (0, y) = 3.**0**.**y** – 6.**0** – 3.**y** + 7 = **-3y + 7**.

v' (y) = -3 $\neq$ **0**

portanto não há ponto crítico em **v (y)** , logo os extremos de **v** ocorrem nos pontos **(0, 0)** e **(0, 5)**.

◙ **Para o segmento (3, 0)** até **(0, 5)** no plano **xy** uma das equações é $y = -\frac{5}{3}x + 5$; $0 \le x \le 3$.

w (x) $= f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) = 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7 \Leftrightarrow w(x) = -5x^2 + 14x - 8$.

w' (x) = -10x + 14 =0 $\Leftrightarrow$ **x =** $\frac{7}{5}$, substituindo em $y = -\frac{5}{3}x + 5$ temos **y =** $\frac{8}{3}$, logo temos os extremos ocorrendo nos pontos **(3, 0)** , **(0, 5)** e no ponto crítico $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

☺ O último procedimento agora é montar uma tabela para indicarmos os **Extremos Absolutos** ...

(x, y)	(0, 0)	(3, 0)	(0, 5)	$\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$	(1, 2)
f (x, y)	**7**	**-11**	-8	$\frac{9}{5}$	1

☺ Finalmente ... $\begin{cases} \text{Ponto de } \textbf{Máximo Absoluto } (0, 0, 7). \\ \text{Ponto de } \textbf{Mínimo Absoluto } (3, 0, -11). \end{cases}$

<u>EXERCÍCIOS</u> :

1) Idem para **f (x,y) = xy – x – 3y** sobre a região **R** triangular com vértices **(0, 0)** , **(5, 0)** e **(0, 4)** .

2) Idem para **f(x,y) =** $x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ sobre a região **R** quadrada com vértices **(0, 0)** , **(2, 0)** , **(0, 2)** e **(2, 2)** .

3) Idem para **f (x,y) = -3x + 4y + 5** sobre a região **R** triangular com vértices **(0, 0)** , **(4, 0)** e **(4, 5)** .

<u>EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES</u> :

1) Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, cuja área total é de 12 m² para que ela possua um volume máximo.

2) Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 cm^3 e que sabendo-se que será utilizada a mínima quantidade de material para sua construção.

3) Qual a área máxima que um retângulo pode ter se seu perímetro é de 20 cm ?

CÁLCULO II – ENGENHARIAS – _AULA 10_

REGRA DA CADEIA

Derivada total

Sejam $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ a **Derivada Total** de **z** é dada por :

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}}$$

Exemplos :

1) $\begin{cases} z = f(x,y) = xy + x^2 \\ x(t) = t+1 \\ y(t) = t+4 \end{cases}$ determine $\dfrac{dz}{dt}$

Resolução :

• $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + 2x$ •• $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$

• $\dfrac{dx}{dt} = 1$ •• $\dfrac{dy}{dt} = 1$

Portanto ...

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = (y+2x).(1) + (x).(1) = y + 2x + x = y + 3x \Leftrightarrow (t+4) + 3(t+1) =$$

$$= t + 4 + 3t + 3 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = 4t + 7.$$

2) $\begin{cases} z = f(x,y) = \text{sen}(2x+5y) \\ x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$ determine $\dfrac{dz}{dt}$

Resolução :

● $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(2x+5y).2$ ●● $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(2x+5y).5$

● $\dfrac{dx}{dt} = -\text{sen}\, t$ ●● $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

Portanto ... $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{dy}{dt} = 2.\cos(2x+5y).(-\text{sen}\, t) + 5.\cos(2x+5y).(\cos t) =$

$= -2.\cos(2.\cos t + 5.\text{sen}\, t).\text{sen}\, t + 5.\cos(2.\cos t + 5.\text{sen}\, t).\cos t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{dz}{dt} = (-2.\text{sen}\, t + 5.\cos t).\cos(2.\cos t + 5.\text{sen}\, t).$

<u>Exercícios</u> :

● Dê a expressão da **Derivada Total** das funções :

a) $\begin{cases} z = 5xy + x^2 - y^2 \\ x = t^2 - 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = \ln xy \\ x = 2t^2 \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) \\ x = 2t + 1 \\ y = 4t^2 - 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} z = tg(x^2 + y) \\ x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} z = x^2 + 3xy + 5y^2 \\ x = \text{sen}\, t \\ y = \cos t \end{cases}$

PLANO TANGENTE

Dada a a função **z = f(x,y)**, o **Plano Tangente** ao gráfico desta função passando pelo ponto **P_o (x_0, y_0, z_0)** com **z** diferenciável em **(x_0, y_0)** é dado pela equação :

$$\boxed{z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} .(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} .(y - y_0)}$$

onde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

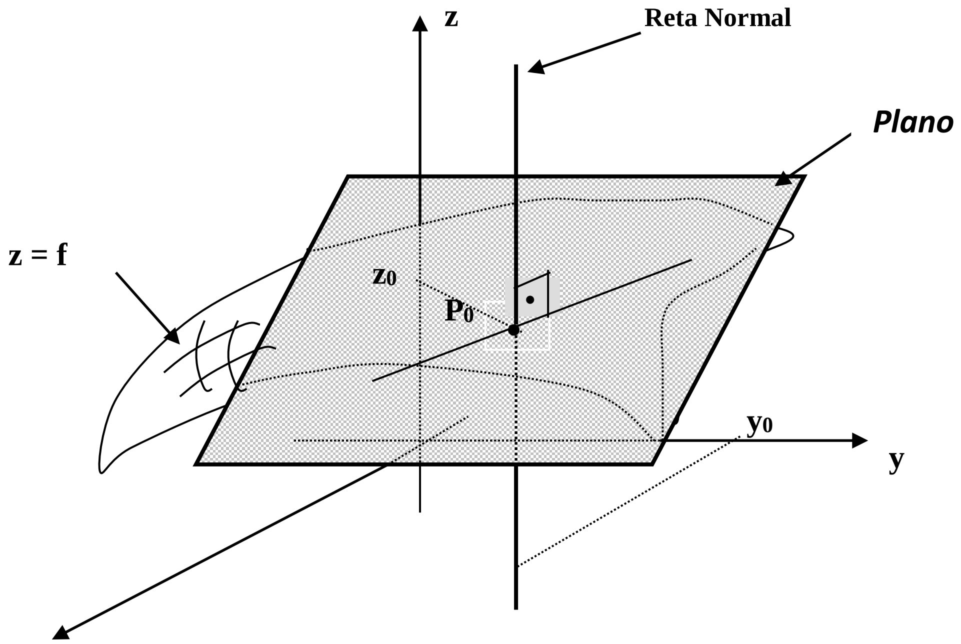
Tal plano é perpendicular ao vetor $\vec{\nabla} = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, -1 \right)$ e considerando a reta **r** que

passa pelo ponto **P_0** e é paralela ao vetor $\vec{\nabla}$ temos que **r** é denominada **Reta Normal** ao gráfico de **z = f(x,y)** e tem

como equação :

$$\boxed{\mathbf{r:}\ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \,.\, \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}, -1 \right);\ \lambda \in \mathbf{R}}$$

Graficamente ...



x0 ....

x

Exemplos :

1) Dê a equação do plano tangente e da reta normal à curva $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ no ponto **P0 (2, -1, z0)** .

Resolução :

● **z0 = f (x0, y0)** = $\frac{2^2}{2} - (-1)^2 = \frac{4}{2} - 1 \Leftrightarrow$ **z0 = 1**.

●● $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2} = x \Leftrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = x\big|_{(2,-1)} = 2$.

●●● $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y \Leftrightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = -2y\big|_{(2,-1)} = -2.(-1) = 2$.

Portanto ...

●●●● $z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} .(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} .(y - y_0) \Leftrightarrow z - 1 = 2.(x-2) + 2.(y+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z - 1 = 2x - 4 + 2y + 2 \Leftrightarrow 2x + 2y - z = 1$. **(** Eq. do plano tangente **)**

●●●●● **r :** (x, y, z) = (x0, y0, z0) + λ . $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, -1 \right)$; $\lambda \in$ **R** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **r :** (x, y, z) = (2, -1, 1) + λ . $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,-1)}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,-1)}, -1 \right)$; $\lambda \in$ **R** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **r :** (x, y, z) = (2, -1, 1) + λ .(2, 2, -1); $\lambda \in$ **R**. **(** Eq. da reta normal **)**

---

2) Dê a equação do plano tangente e da reta normal à curva **z = 2x² – 3y²** no ponto **P0 (1, 1, z0)** .

Resolução :

● $z_0 = f(x_0, y_0) = 2.(1)^2 - 3.(1)^2 \Leftrightarrow z_0 = -1$.

●● $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x \Leftrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = 4x\Big|_{(1,1)} = 4$.

●●● $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -6y \Leftrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = -6y\Big|_{(1,1)} = -6.(1) = -6$.

Portanto ...

●●●● $z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}.(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}.(y - y_0) \Leftrightarrow z + 1 = 4.(x-1) - 6.(y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + 1 = 4x - 4 - 6y + 6 \Leftrightarrow 4x - 6y - z = -1$. **(** Eq. do plano tangente **)**

●●●●● **r :** $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda . \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}, -1 \right); \ \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **r :** $(x, y, z) = (1, 1, -1) + \lambda . \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}, -1 \right); \ \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **r :** $(x, y, z) = (1, 1, -1) + \lambda .(4, -6, -1); \ \lambda \in \mathbf{R}$. **(** Eq. da reta normal **)**

<u>**Exercícios**</u> **:**

1) Idem para $\mathbf{z = xy}$ em $\mathbf{P_0(1, 1, z_0)}$.

2) Idem para $\mathbf{z = 4x^2 + 9y^2}$ em $\mathbf{P_0(-2, -1, z_0)}$.

3) Idem para $\mathbf{z = \ln(xy)}$ em $\mathbf{P_0}\left(\dfrac{1}{2}, \mathbf{2, z_0}\right)$.

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, G.: *Cálculo (3 volumes)*. LTC, 1994.

AVRITZER, D. & CARNEIRO, M. J. D. : *Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis*. CAED-UFMG, 2012. Link para o arquivo pdf

GUIDORIZZI, H.: *Um Curso de Cálculo (4 volumes)*. LTC, 2001.

LEITHOLD, L.: *O Cálculo com Geometria Analítica (2 volumes)*. Harbra, 1994.

MARSDEN, J.E. and TROMBA, A.J.: *Vector Calculus, 4ª edição*. W.H.Freeman and Co., 1996.

PINTO, D. e MORGADO, M.C.F. : *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Editora UFRJ, 1999

PISKUNOV, N.: *Cálculo Diferencial e Integral (2 volumes), 6ª edição.* MIR, 1983.

SIMMONS, G. F.: *Cálculo com geometria Analítica (2 volumes)*. McGraw-Hill, 1987.

SPIVAK, M.: *Calculus. 3ª edição.* Publish or Perish, 1994.

STEWART, J.: *Cálculo - Vol. 2, 6ª edição.* Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

ANTON, H.: *Cálculo, Um Novo Horizonte - Vol. 2, 6ª edição.* Editora Bookman, 2000.

THOMAS, G.: *Cálculo – Vol. 2, 10ª edição.* Editora Addison Wesley, 2003.